Eesti koolinoorte 65. füüsikaolümpiaad

20. jaanuar 2018. a. Piirkondlik voor.

Gümnaasiumi *ülesannete lahendused*

Eessõna

Allpool on toodud iga ülesande üks õige lahenduskäik (mõnel juhul ka enam). **Kõik alternatiivsed õiged lahenduskäigud tuleb hinnata samuti maksimumhindega.** Iga alternatiivse lahenduskäigu jaoks tuleb kontrollijatel koostada hindamisskeem, juhindudes võimalusel juuresoleva hindamisskeemi punktijagamisproportsioonist. Soovituslikud maha-arvamise punktid: numbriline arvutusviga — 0,5; viga teisendustes — 0,5 p. (märgi jms väiksem viga) või 1 p. (viga, mis viib dimensioonide konfliktini), maha arvata ainult üks kord, st edasikanduvat viga mitte karistada; kui vastus tuleb füüsikaliselt absurdne, siis võib täiendavalt karistada 0,5 punktiga; üksik viga lähtevalemis: 0,5 p. (kui märgiviga), kuni 50% (sisuline viga).

1. (*KONTRAKTSIOON*) (*6 p.*) *Autor: EFO žürii.*
Tähistame võetud vee massi m_v ning piirituse massi m_p. Teades, piirituse massiprotsenti $p = 44{,}1\,\%$, saame leida vee ja piirituse masside suhte.

$$\frac{m_p}{m_p + m_v} = 0{,}441 \quad \Rightarrow \quad m_p = 0{,}789 m_v \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

Teades lahuse kontraktsiooni $\gamma = 6\,\%$, saame kirjutada seose

$$(V_v + V_p)0{,}94 = V$$

Avaldades vee ja piirituse ruumalad massi ja tiheduse kaudu, saame

$$\frac{m_v}{\rho_v} + \frac{m_p}{\rho_p} = 1{,}064V \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

Masside suhtest saime, et $m_p = 0{,}789 m_v$. Asendades selle eelmisesse võrrandisse, saame leida vee ja piirituse massid.

$$\frac{m_v}{1\,\mathrm{kg/dm^3}} + \frac{0{,}789 m_v}{0{,}79\,\mathrm{kg/dm^3}} = 1{,}064 \cdot 1\,\mathrm{dm^3} \quad \Rightarrow \quad m_v = 532\,\mathrm{g} \quad [\mathbf{2\ p.}]$$

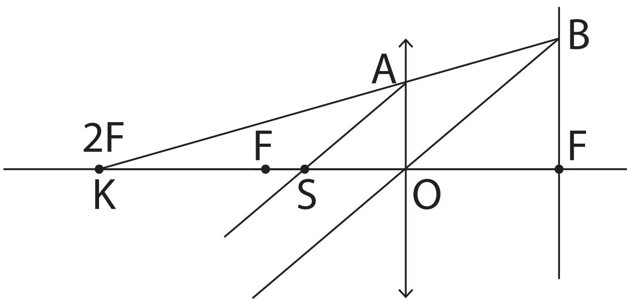
$$m_p = 0{,}789 m_v = 420\,\mathrm{g} \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

Vee ja piirituse ruumalad on seega

$$V_v = \frac{m_v}{\rho_v} = 532\,\mathrm{cm}^3 \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

$$V_p = \frac{m_p}{\rho_p} = 532\,\mathrm{cm}^3 \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

2. (*KAKS VALGUSALLIKAT*) (*8 p.*) *Autor: EFO žürii.*
Kui optilisel peateljel paiknev valgusallikas asub läätsest 18 cm kaugusel, mis on võrdne kahekordse fookuskaugusega, siis selle valgusallika asub teisel pool läätse läätsest samuti kahe fookuskaugusel ehk 18 cm kaugusel. [**1 p.**] Et kahe valgusallika kujutised kattuksid, peab teine kujutis olema näilik. [**1 p.**] Konstrueerime valgusallika asukoha, kui kujutise asukoht on teada. (Joonis [**2 p.**])



Sarnastest kolmnurkadest $\triangle KAO$ ja $\triangle KBF$ saame, et

$$\frac{AO}{BF} = \frac{KO}{KF} = \frac{2f}{3f} = \frac{2}{3} \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

Teisest sarnaste kolmnurkade paarist $\triangle SAO$ ja $\triangle OBF$ saame, et

$$\frac{AO}{BF} = \frac{OS}{FO} = \frac{b}{f}, \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

kus b - teise valgusallika kaugus läätsest. Ühendades kaks seost, saame

$$\frac{KO}{KF} = \frac{OS}{FO} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3} = \frac{b}{f} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{2f}{3} = 6\,\mathrm{cm} \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

Teine valgusallikas peab asuma läätsest 6 cm kaugusel ning kahe valgusallika kaugus teineteisest on $6\,\mathrm{cm} + 18\,\mathrm{cm} = 24\,\mathrm{cm}$. [**1 p.**]

TEINE LAHENDUS

Sarnaste kolmnurkade asemel saame kasutada läätse valemit. Teades, et valgusallikas asub läätsest $a = 18\,\mathrm{cm}$ kaugusel ning läätse fookuskaugus on $f = 9\,\mathrm{cm}$, saame leida kujutise kauguse k läätsest.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad k = 18\,\mathrm{cm} \qquad [\mathbf{2\ p.}]$$

Teise valgusallika kujutis peab olema samuti samas punktis, kus esimese valgusallika oma, seega peab teise valgusallikaga tekitaud kujutis olema näiline [**2 p.**] ning valgusallikas peab asuma kujutisega samal pool läätse [**1 p.**]. Kasutades läätse valemit, leiame teise valgusallika asukoha

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{k} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad a = 6\,\mathrm{cm} \qquad [\mathbf{3\ p.}]$$

Teine valgusallikas peab asuma läätsest 6 cm kaugusel ning kahe valgusallika kaugus teineteisest on $6\,\mathrm{cm} + 18\,\mathrm{cm} = 24\,\mathrm{cm}$. [**1 p.**]

3. (*RADIAATOR*) (*8 p.*) *Autor: Ardi Loot.*
Leiame radiaatorit kirjeldava võrdeteguri c_r. Kuna radiaatori väljundvõimus on võrdeline pealevoolu- ja tagasivoolutemperatuuride keskmise ja toatemperatuuri vahega, siis

$$P_n = c_r \left(\frac{T_{pn} + T_{tn}}{2} - T_{0n} \right) \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

ja võrrandit lahendades saame

$$c_r = \frac{2P_n}{T_{pn} + T_{tn} - 2T_{0n}} = 40\,\mathrm{W/K} \quad [\mathbf{1\ p.}].$$

Nüüd paneme kirja võrrandisüsteemi radiaatori tegeliku võimuse ja tagasivoolutemperatuuri jaoks

$$\begin{cases} P = c_r \left(\frac{T_p + T_t}{2} - T_0 \right) & [\mathbf{1\ p.}] \\ P = \Gamma c_v \rho_v (T_p - T_t)\,. & [\mathbf{1\ p.}] \end{cases}$$

Esimene kirjeldab radiaatori väljundvõimust ja teine peale- ja tagasivoolutemperatuuride vahest tingitud energiaülekannet. Lahendades võrrandid saame

$$\begin{aligned} P &= \frac{2\Gamma c_v \rho_v c_r \left(T_p - T_0\right)}{2\Gamma c_v \rho_v + c_r} \approx 1{,}49\,\mathrm{kW} \\ T_t &= \frac{2\Gamma T_p c_v \rho_v + c_r \left(2T_0 - T_p\right)}{2\Gamma c_v \rho_v + c_r} \approx 48{,}7\,^\circ\mathrm{C}. \quad [\mathbf{3\ p.}] \end{aligned}$$

Radiaatori maksimaalne võimsus on võimalik leida piirjuhuna, kui radiaatorit läbiv vooluhulk Γ kasvab väga suureks. Või veelgi lihtsamalt, kui mõista, et sellisel juhul saab tagasivoolutemperatuur võrdseks pealevoolutemperatuuriga ning maksimaalne võimsus avaldub

$$P_{max} = c_r \left(T_p - T_0\right) \approx 1{,}92\,\mathrm{kW}. \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

4. (*PUMP*) (*8 p.*) *Autor: Ardi Loot.*
a) Torus olevale veesambale mõjub raskusjõud F_r, takistusjõud F_h ja pumba poolt avaldatav jõud F_p.[**1 p.**] Ühtlase pumpamise korral kehtib jõudude tasakaal $F_r + F_h = F_p$. [**1 p.**] Raskusjõud on arvutatav leides torus oleva vee massi

$$F_r = mg = \rho S h g \approx 9{,}85\,\mathrm{N}, \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

kus toru ristlõikepindala $S = \pi d^2/4$. Hõõrdejõu, mis on tingitud vee liikumisest torus, leiame ülesande tekstis antud rõhulangu valemiga, kui korrutame selle toru ristlõikepindalaga.

$$F_h = \Delta p S = c_h Q^2 h S / d^5 \approx 9{,}59\,\mathrm{N}. \quad [\mathbf{2\ p.}]$$

Pumba võimsus on antud valemiga $P = F_p v/\eta$, kus $v = Q/S$ on vee liikumise kiirus torus. Jõudude tasakaalust saame

$$P = \left(F_r + F_h\right)\frac{Q}{S\eta} = \frac{Qh}{d^5\eta}\left(\rho g d^5 + c_h Q^2\right) \approx 193\,\mathrm{W}. \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

b) Kuna pump asub maapinnal, siis peab pump tekitama vee liigutamiseks alarõhu. Maksimaalne alarõhk on juhul, kui pump tekitab vaakumi [**1 p.**]. Sellisel piirjuhul surub õhurõhk veesammast ülespoole jõuga p_0S ja pumba töötamiseks peab see jõud olema vähemalt sama suur kui veesambale mõjuv raskusjõud $p_0S = \rho S h_m g$. Maksimaalne kaevu sügavus on seega $h_m = p_0/(\rho g) \approx 10{,}2\,\mathrm{m}$ [**1 p.**].

5. (*VEOK RINGTEEL*) (*8 p.*) *Autor: Jonatan Kalmus.*
Kui veok libisema ei hakka, piirab tema maksimaalset kiirust tsentrifugaaljõud, mis võib veoki külili lükata [**2 p.**]. Veoki masskeskmele mõjub horisontaalselt raskusjõud $F_R = mg$ [**0,5 p.**] ning vertikaalselt tsentrifukaaljõud $F_T = m\frac{v^2}{R}$ [**0,5 p.**]. Vaatleme veoki projektsiooni vertikaalsele laiusega parallelsele tasandile [**0,5 p.**]. Saame kirja panna kangireegli veoki väliskurvis oleva alumise nurga jaoks (väliskurvis oleva ratta välimise punkti ja maa kontakt), mille ümber tentrifukaaljõu jõumoment veokit keerama hakkab [**1 p.**]. Ümber selle punkti keerab veokit ühtpidi raskusjõu jõumoment $\tau_R = F_R\frac{l}{2}$ [**0,5 p.**] ning teistpidi tsentrifukaaljõu jõumoment $\tau_T = F_T h$ [**0,5 p.**]. Piirjuhul on need jõumomendid võrdsed ning saame võrrandi:

$$mg\frac{l}{2} = \frac{mv^2}{R}h \quad [\mathbf{1{,}5\ p.}]$$

Kust saame avaldada maksimaalse kiiruse:

$$v = \sqrt{\frac{Rgl}{2h}} \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

Kommentaarid: 1) Kui õpilane ei kirjuta konkreetselt välja, et maksimaalset kiirust piirab tsentrifukaaljõud, sest libisemist pole, kuid lahendab ülesande õigesti, anda selleks mõeldud [**2 p.**] asemel [**1,5 p.**]. 2) Kui õpilane kirjutab kohe välja õige kangi reegli võrrandi, anda kõik võrrandi ning eelnevate valemite punktid. 3) Sõnalise kirjeldamise võib asendada ka joonisega, kust vastav info on välja loetav.

6. (*ÜHENDATUD SATELLIIDID*) (*10 p.*) *Autor: Eero Vaher.*
Trossi puudumisel peab satelliidile mõjuv kesktõmbejõud olema võrdne sellele mõjuva raskusjõuga. Esimese satelliidi jaoks $\frac{m{v'_1}^2}{R_1} = G\frac{Mm}{R_1^2}$ [**2 p.**], millest järeldub $v'_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_1}}$ [**0,5 p.**] ning analoogiliselt $v'_2 = \sqrt{\frac{GM}{R_2}}$ [**0,5 p.**].

Kuna satelliidid on trossiga ühendatud, siis seesmisele satelliidile mõjuv kesktõmbejõud peab olema sellele mõjuva raskusjõu ning trossi pinge vahe ning välimisele satelliidile mõjuv kesktõmbejõud peab olema sellele mõjuva raskusjõu ning trossi pinge summa. Niisiis

$$\begin{cases} \frac{mv_1^2}{R_1} = G\frac{Mm}{R_1^2} - T \\ \frac{mv_2^2}{R_2} = G\frac{Mm}{R_2^2} + T \end{cases}. \quad [\mathbf{2\ p.}]$$

Kuna $v_1 = \frac{2\pi R_1}{P}$ ning $v_2 = \frac{2\pi R_2}{P}$ [**1 p.**], siis saame kirjutada

$$\frac{4\pi^2}{P^2}(R_1 + R_2) = GM\frac{R_2^2 + R_1^2}{R_1^2 R_2^2}. \quad [\mathbf{2\ p.}]$$

Tehes asenduse $R_2 = 2R_1$ saame $\frac{2\pi R_1}{P} = \sqrt{\frac{5GM}{12R_1}}$ [**1 p.**] ning asendusest $R_1 = \frac{R_2}{2}$ järeldub $\frac{2\pi R_2}{P} = \sqrt{\frac{10GM}{3R_2}}$ [**1 p.**]. Sisemine satelliit tiirleb niisiis trossi tõttu $\sqrt{\frac{12}{5}}$ korda väiksema ning välimine $\sqrt{\frac{10}{3}}$ korda suurema joonkiirusega.

7. (*KUUP VEEGA*) (*10 p.*) *Autor: Jonatan Kalmus.*
Tähistame otsitava vee massi m, veesamba kõrguse h ning süsteemi masskeskme kõrguse l. Kuna kuup on sümmeetriline, asub selle masskese kõrgusel $\frac{a}{2}$ [**0,5 p.**]. Vee masskese asub veekoguse keskel ehk kõrgusel $\frac{h}{2}$ [**0,5 p.**]. Kui kuup on tühi, siis ühtib süsteemi masskese kuubi masskeskmega ehk $l = \frac{a}{2}$ ning veesamba kõrgus $h = 0$. Kui nüüd kuubi põhja aeglaselt vett valada, hakkab veesamba kõrgus h kasvama ning süsteemi masskeskme kõrgus l vähenema, kuna kogu lisatud vesi asub algsest süsteemi masskeskmest all pool. Süsteemi masskeskme kõrgus l ei saa vee lisamisega enam alaneda, kui see ühtib veesamba kõrgusega h, sest kui selles olukorras vett juurde lisada, oleks äsja juurde lisatud veekogus eelnevast süsteemi masskeskmest kõrgemal ning süsteemi masskeskme kõrgus hakkaks kasvama. Seega, masskese on võimalikult madalal olukorras, kui süsteemi masskeskme kõrgus ühtib veesamba kõrgusega ehk $l = h$. [**4 p.**] Rakendades kangi reeglit saame:

$$M(\frac{a}{2} - l) = m(l - \frac{h}{2}). \quad [\mathbf{2\ p.}]$$

Teades, et $l = h$ ning vee mass $m = \rho a^2 h$ [**0,5 p.**] ning asendades need eelnevasse võrrandisse:

$$M(\frac{a}{2} - h) = \rho a^2 h(h - \frac{h}{2}). \quad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Siit saame h jaoks ruutvõrrandi:

$$\rho a^2 h^2 + 2Mh - Ma = 0, \quad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

$$h = \frac{-2M \pm \sqrt{4M^2 + 4\rho a^3 M}}{2\rho a^2}. \quad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Kuna negatiivne lahend ei sobi, saame lihtsustades:

$$h = \frac{M(\sqrt{1 + \frac{\rho a^3}{M}} - 1)}{\rho a^2}. \quad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Otsitav veekoguse mass:

$$m = \rho a^2 h = M(\sqrt{1 + \frac{\rho a^3}{M}} - 1). \quad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Märkus. Kui õpilane väidab, et $l = h$ ilma selge põhjenduseta, anda selle osa eest vastavalt selgituse puudulikkusele[**4 p.**] asemel minimaalselt [**1 p.**].

TEINE LAHENDUS

Minimaalsele süsteemi masskeskmele vastavat veesamba kõrgust on võimalik leida ka tuletise abil. Kuubi sümmetria tõttu asub selle masskese kõrgusel $\frac{a}{2}$ [**0,5 p.**] ning vee masskese kõrgusel $\frac{h}{2}$ [**0,5 p.**]. Rakendades kangi reeglit saame:

$$M(\frac{a}{2} - l) = m(l - \frac{h}{2}). \quad [\mathbf{2\ p.}]$$

Sellest tuleb avaldada süsteemi masskeskme kõrgus l ning otsida h-d, kui $\frac{dl}{dh} = 0$. [**1,5 p.**] Teades, et vee mass $m = \rho a^2 h$ [**0,5 p.**]:

$$l = \frac{Ma + \rho a^2 h^2}{2(M + \rho a^2 h)}, \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

$$\frac{dl}{dh} = \frac{4\rho a^2 h(M + \rho a^2 h) - 2\rho a^2 (Ma + \rho a^2 h^2)}{4(M + \rho a^2 h)^2} = 0. \quad [\mathbf{2\ p.}]$$

Siit saame lihtsustades ning ρa^2-ga läbi jagades h jaoks ruutvõrrandi:

$$\rho a^2 h^2 + 2Mh - Ma = 0. \quad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

See on identne eelnevalt saadud ruutvõrrandiga ning edasi lahendub kõik analoogselt:

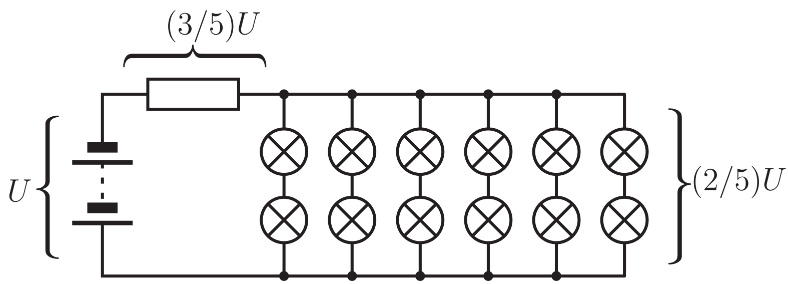
$$h = \frac{-2M \pm \sqrt{4M^2 + 4\rho a^3 M}}{2\rho a^2}, \quad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

$$h = \frac{M(\sqrt{1 + \frac{\rho a^3}{M}} - 1)}{\rho a^2}, \quad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

$$m = \rho a^2 h = M(\sqrt{1 + \frac{\rho a^3}{M}} - 1). \quad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

8. (*12 LAMPI*) (*10 p.*) *Autor: Valter Kiisk.*

a) Ilmselt takisti tuleb voolu piiramiseks ühendada järjestikku vooluallikaga (ükski teine kombinatsioon, sh takisti ärajätmine, ei võimalda kõiki 12 lampi lülitada nominaalpingele). [**2 p.**] Lambid saab põhimõtteliselt ahelasse ühendada 1-, 2-, 3-, 4-, 6- või 12-kaupa jadamisi ja seejärel rööbiti (st kõik lambid on ahelasse lülitatud ühetaoliselt). [**2 p.**] Iga kombinatsiooni korral arvutame esmalt ahela erinevate osade takistuse (ühikutes R, mis on üksiku lambi takistus), ja seejärel arvestame pinge jagunemist elementidel proportsionaalselt takistusega. [**1 p.**] Erinevate variantide kontrollimine näitab, et lambile langeb nominaalpinge näiteks juhul kui ühendada lambid kahekaupa jadamisi ja seejärel 6 sellist ahelat rööbiti. Seega õige skeem on selline nagu kujutatud joonisel. [**2 p.**]



b) Kuni kõik lambid põlevad, langeb igale lambile pinge $U/5$, kus U on pingeallika klemmipinge. [**0,5 p.**] Koguvõimsus on vastavalt

$$P_1 = 12 \times \frac{U^2}{25R} = \frac{12U^2}{25R}, \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

kus R on üksiku lambi takistus. Kui üks lampidest põleb läbi, siis ka sellega järjestikku ühendatud pirn lõpetab töötamise. Järgi jääb vaid 5 rööbiti ühendatud ahelat ja seega lampide kogutakistus on $2R/5$. Võttes nüüd arvesse pinge jagunemist ahelas, saab pinge igal lambil olema

$$U \times \frac{2R/5}{2R/5 + R/2} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{9}U \quad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

ja lampide koguvõimsus vastavalt

$$P_2 = 10 \times \frac{4U^2}{81R} = \frac{40U^2}{81R}. \quad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Seega koguvõimsus kasvab $P_2/P_1 = 250/243 \approx 1{,}029$ korda. [**0,5 p.**]

Märkus. Leidub veel mitu sobivat skeemi. Toome mõned neist:

- Ühendame lambid kolmekaupa jadamisi ja seejärel 4 sellist ahelat rööbiti. Sel juhul osas *b)* kahaneb lampide koguvõimsus 1,080 korda.
- Ühendame lambid neljakaupa rööbiti ja seejärel 3 sellist plokki jadamisi takistiga. Sel juhul osas *b)* kahaneb lampide koguvõimsus 1,024 korda

Töötavaid skeeme leidub rohkemgi.

9. (*KELK*) (*12 p.*) *Autor: Andreas Valdmann.*
Esiteks näeme, et kui Juku tõmbaks kelgunööri horisontaalselt, siis ei hakkaks kelk liikuma ükskõik kui suure tõmbejõu korral, sest Jukule mõjuv hõõrdejõud on väiksem kui kelgu liikumapanemiseks vajalik jõud:

$$\mu_1 m_1 g < \mu_2 m_2 g. \tag{1}$$

Esimesena hakkavad libisema hoopis Juku tallad.

Kui Juku tõmbab nööri teatud nurga all ülespoole, siis tekib nööris vertikaalne jõu komponent F_v, mis tõstab kelku ülespoole ja surub Jukut allapoole. Seega mõjub Jukule tema libisemise piiril hõõrdejõud $F_\mathrm{h1} = \mu_1 (m_1 g + F_\mathrm{v})$ ja kelgule tema libisemise piiril hõõrdejõud $F_\mathrm{h2} = \mu_2 (m_2 g - F_\mathrm{v})$. Kuna küsiti minimaalset nurka, siis peab kelk olema libisemise piiri napilt ületanud ja Juku sellele napilt alla jääma ehk piirjuhul $F_\mathrm{h1} = F_\mathrm{h2} = F_\mathrm{h}$, kus F_h tähistab nööris tekkiva jõu horisontaalset komponenti. Jõudude tasakaalu võrrandist

$$\mu_1 (m_1 g + F_\mathrm{v}) = \mu_2 (m_2 g - F_\mathrm{v})$$

saame avaldada nööris tekkiva jõu vertikaalse komponendi:

$$\mu_1 m_1 g + \mu_1 F_\mathrm{v} = \mu_2 m_2 g - \mu_2 F_\mathrm{v},$$

$$F_\mathrm{v} (\mu_1 + \mu_2) = g (\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1),$$

$$F_\mathrm{v} = g \frac{\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Jõu horisontaalkomponendi leidmiseks asendame saadud tulemuse näiteks Jukule mõjuva hõõrdejõu võrrandisse

$$F_\mathrm{h} = \mu_1 \left(m_1 g + g \frac{\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1}{\mu_1 + \mu_2} \right)$$

ja avaldame:

$$\begin{aligned} F_\mathrm{h} = g\mu_1 \frac{m_1 (\mu_1 + \mu_2) + \mu_2 m_2 - \mu_1 m_1}{\mu_1 + \mu_2} = \\ = g\mu_1 \frac{\mu_2 m_1 + \mu_2 m_2}{\mu_1 + \mu_2} = g\mu_1\mu_2 \frac{m_1 + m_2}{\mu_1 + \mu_2}. \end{aligned}$$

Nurk kelgunööri ja maapinna vahel on

$$\alpha = \arctan\left(\frac{F_\mathrm{v}}{F_\mathrm{h}}\right) = \arctan\left(\frac{\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1}{\mu_1 \mu_2 (m_1 + m_2)}\right) = 21^\circ.$$

Hindamisjuhend:

- Jukule mõjuva hõõrdejõu leidmine: $F_{\mathrm{h1}} = \mu_1 (m_1 g + F_{\mathrm{v}})$ [**2 p.**] Kui vertikaalseid jõude pole arvestatud, siis anda 1 p.
- Kelgule mõjuva hõõrdejõu leidmine: $F_{\mathrm{h2}} = \mu_2 (m_2 g - F_{\mathrm{v}})$ [**2 p.**] Kui vertikaalseid jõude pole arvestatud, siis anda 1 p. Kui õpilane pole siin või eelnevas punktis hõõrdejõudu otseselt avaldanud, kuid on selgitanud, et nööris tekkiva jõu vertikaalkomponent hõõrdejõudu mõjutab, siis anda selle idee eest kuni 2 punkti.
- Horisontaalsete jõudude tasakaal: $\mu_1 (m_1 g + F_{\mathrm{v}}) = \mu_2 (m_2 g - F_{\mathrm{v}})$ [**1 p.**]
- Nööris tekkiva jõu vertikaalkomponenti avaldamine [**2 p.**]

$$\mu_1 m_1 g + \mu_1 F_{\mathrm{v}} = \mu_2 m_2 g - \mu_2 F_{\mathrm{v}},$$

$$F_{\mathrm{v}} (\mu_1 + \mu_2) = g (\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1),$$

$$F_{\mathrm{v}} = g \frac{\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1}{\mu_1 + \mu_2}.$$

- Nööris tekkiva jõu horisontaalkomponendi leidmine (avaldatud g, μ_1, μ_2, m_1, m_2 kaudu) [**2 p.**]

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{h}} &= \mu_1 \left(m_1 g + g \frac{\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1}{\mu_1 + \mu_2} \right) = \\ &= g\mu_1 \frac{m_1 (\mu_1 + \mu_2) + \mu_2 m_2 - \mu_1 m_1}{\mu_1 + \mu_2} = \\ &= g\mu_1 \frac{\mu_2 m_1 + \mu_2 m_2}{\mu_1 + \mu_2} = g\mu_1\mu_2 \frac{m_1 + m_2}{\mu_1 + \mu_2}. \end{aligned}$$

  Kui avaldis on korrektne, aga mitte siin esitatud lõppkujule viidud, siis anda täispunktid.

- $\alpha = \arctan \left(\frac{F_{\mathrm{v}}}{F_{\mathrm{h}}} \right)$ [**1 p.**]

- Lõppavaldise leidmine: $\alpha = \arctan\left(\frac{\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1}{\mu_1\mu_2(m_1+m_2)}\right)$ [**1 p.**]
  Kui avaldis on korrektne, aga esitatud teisel kujul, siis anda täispunktid.

- Õige arvuline vastus: $\alpha = 21°$ [**1 p.**]

10. (*TSÜKLOTRON*) (*12 p.*) *Autor: Kristian Kuppart.*
Osakesed hakkavad tsüklotronis liikuma päripäeva mööda järjest suureneva raadiusega poolringjooni. osakese trajektoori raadius avaldub kui $r = mv/qB$, kus v on osakese kiirus. Osake väljub tsüklotronist, kui tema trajektoori raadius kasvab sama suureks tsüklotroni raadiusega R, sel juhul tema kiirus $v = qBR/m$. Ühe täisringi jooksul saab osake elektriväljalt kineetilise energia $\varepsilon_k = 2qEd$, kuna osake läbib selle aja jooksul riba 2 korda. Seega osakese kiirus tsüklotronist väljumisel

$$\frac{mv^2}{2} = 2qEdn, \qquad v^2 = \frac{4qEdn}{m}$$

Avaldades neist võrranditest n, saame $n = \dfrac{qB^2R^2}{4mEd}$.

Hindamisjuhend:

- Õigesti kirjeldatud või visandatud osakese trajektoor [**3 p.**], kui suunda ei ole kirjeldatud või märgitud, siis [**2 p.**]

- Õige üldine avaldis osakese trajektoori raadiuse r jaoks magnetväljas: $r = mv/qB$ [**2 p.**]

- Osakese kiiruse või kineetilise energia tsüklotronist väljumisel leidmine (avaldamine R, B, m kaudu) [**2 p.**]

- Elektriväljalt saadud kineetilise energia avaldis n täisringi jooksul $\varepsilon_k = 2qEdn$ [**3 p.**]

- Õige lõppvõrrand kahe kineetilise energia või kiiruse avaldise võrdsusest [**1 p.**]

- Õige lõppvastus [**1 p.**]

E1. (*TOPSI MASS*) (*10 p.*) *Autor: EFO žürii.*
Leiame joonlaua masskeskme laua serval.
Asetame tühja topsi joonlaua otsa ning leiame joonlaua ja topsi tasakaalupunkti. Mõõdame topsi keskkoha kauguse toetuspunktist l_t ning joonlaua masskeskme kauguse toetuspunktist l_j.
Nüüd lisame süstlaga topsi kindla koguse vett m_v. Vee massi leiame vee tiheduse ja ruumala kaudu.
Asetame veega topsi joonlaua otsa ning leiame joonlaua ja topsi tasakaalupunkti. Mõõdame veega topsi keskkoha kauguse toetuspunktist l_{t2} ning joonlaua masskeskme kauguse toetuspunktist l_{j2}.
Kasutades kangireeglit, saame kirjutada kummagi tasakaalu jaoks välja seose

$$m_t l_t = m_j l_j \quad \Rightarrow \quad m_j = \frac{m_t l_t}{l_j}$$

$$(m_t + m_v) l_{t2} = m_j l_{j2}$$

Asendades esimesest seosest m_j teise seosesse, saame avaldada topsi massi m_t

$$(m_t + m_v) l_{t2} = \frac{m_t l_t}{l_j} \cdot l_{j2} \quad \Rightarrow \quad m_t = \frac{m_v l_{t2} l_j}{l_t l_{j2} - l_{t2} l_j}$$

Hindamisjuhend:
Joonlaua masskeskme leidmine - [**1 p.**]
Joonlaua tasakaalupunkti leidmine tühja topsiga - [**1 p.**]
Idee, et ühte tühja topsi saame lisada kindla koguse vett. Vee massi leidmine - [**1 p.**]
Joonlaua tasakaalupunkti leidmine veega topsiga - [**1 p.**]
Tasakaalu seoste avaldamine (tühja topsiga ning koos veega) - [**2 p.**]
Topsi massi avaldamine - [**1 p.**]
Jõuõlgade l_v ja l_t korrektne mõõtmine (topsi keskkohast) - [**1 p.**]
Topsi massi arvutamine täpsusega 5 %- [**2 p.**] (Väiksem täpsus [**1 p.**]).

E2. (*MURDUMISNÄITAJA*) (*12 p.*) *Autor: Eero Uustalu.*
Järgnevates lahendustes arvestame, et õhu murdumisnäitaja $n_{\text{õhk}} = 1$

VARIANT 1
Täieliku sisepeegelduse piirnurga kaudu.
Vaatame suunast B anuma taha veepiirist ulespoole kinnitatud mm paberi tükki A ja määrame kindlaks nurka α_2, mille juures on piir paberi kujutise ja täieliku sisepeegelduse vahel Murdumisseadusest õhust klaasi ja vee piirpinnal saame

$$1 \cdot \sin 90° = n_v \sin \alpha, \quad \text{ja} \quad n_v \cdot \sin \alpha_1 = 1 \cdot \sin \alpha_2.$$

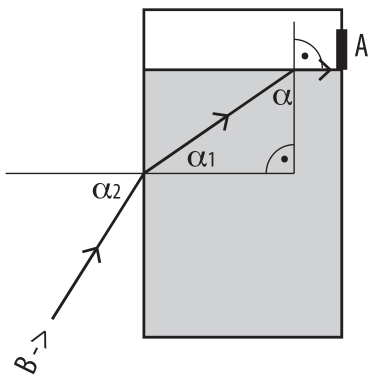
Täisnurksest kolmnurgast saame, et $\sin \alpha = \cos \alpha_1$, seega saame eespool kirjutatud võrranditest avaldade vee murdumisnäitaja n_v

$$1 = n_v \cdot \cos \alpha_1, \quad \text{ja} \quad n_v \sin \alpha_1 = \sin \alpha_2$$

$$n_v = \frac{1}{\cos \alpha_2} \quad \Rightarrow \quad \tan \alpha_1 = \sin \alpha_2$$

$$\alpha_1 = \arctan(\sin \alpha_2)$$

$$n_v = \frac{1}{\cos(\arctan(\sin \alpha_2))}$$

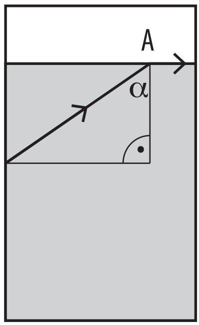


Hindamisjuhend - Kokku maksimaalselt 12 punkti
Joonis - [**3 p.**]
Vee murdumisnäitaja n_v tuletuskäik - [**4 p.**]
Nurga α_2 mõõtmine - [**2 p.**]

Arvutus - [**2 p.**]
Vastus 1,32 – 1,34 – [**1 p.**] (1,30 – 1,36 – [**0,5 p.**].)
See meetod on täpseim, kuna mõõta tuleb ainult üks väline nurk α_2, mida saab teha täpselt. Kontrollkatse tulemus $n_v = 1{,}326 \pm 0{,}012$

VARIANT 2
Täieliku sisepeeglduse kaudu, kasutades vaid vedelikusisest kiirt.
Vaatame vedeliku küljepealt ning leiame koha veepinnal, kus toimub täielik sisepeegeldus. Kasutades millimeeterpaberit, leiame nurga α ning arvutame vee murdumisnäitaja

$$n_v = \frac{1}{\sin\alpha}$$

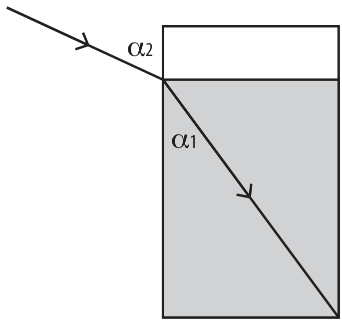


Hindamisjuhend - Kokku maksimaalselt 8 punkti
Joonis - [**2 p.**]
Valem - [**2 p.**]
Nurga α mõõtmine - [**2 p.**]
Arvutused - [**1 p.**]
Vastus 1,32 – 1,34 – [**1 p.**] (1,30 – 1,36 – [**0,5 p.**].)
Suure vea põhjustab eelkõige nurka α määramise keeurukus, kuna punkti A on raske kindlaks teha.

VARIANT 3
Otsene murdumisnurkade mõõtmine
Vaatama näiteks anuma alaserva läbi veekihi pinna. Leiame vaatamis ja langemisnurgad kasutades millimeeterpaberit ning tekkinud kolmnurki.

Vee murdumisnäitaja leiame seosest

$$n_v = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}$$



Hindamisjuhend - Kokku maksimaalselt 9 punkti
Joonis - [**2 p.**]
Nurga α_2 mõõtmine - [**2 p.**]
Nurga α_1 mõõtmine - [**2 p.**]
Valem ja arvutuskäik - [**2 p.**]
Vastus 1,32 – 1,34 – [**1 p.**] (1,30 – 1,36 – [**0,5 p.**].)
Ebatäpsuse põhjustab eelkõige anumasisese nurga määramine ja anuma väikesed mõõtmed ning sellest tulenev suur suhteline viga. Samuti summeeruvad kahe nurga määramise vead.

Märkus. Kirja pandud ainult vastus $n = 1{,}33$ ilma lisapõhjenduseta – kokku 0,5 punkti.