

# Eesti koolinoorte 68. füüsikaolümpiaad

10. aprill 2021. a. Lõppvoor

Gümnaasiumi ülesannete lahendused (10.–12. klass)

## 1. (LUMEPALL) (6 p.) Autor: Oleg Košik

Lumepall peab läbima kiirendusega  $g$  vertikaalse teepikkuse  $H - h$ , seega saame võrduse

$$H - h = \frac{gt^2}{2},$$

kus  $t$  on lumepalli lennuaeg. Olgu  $w$  lumepalli algkiirus, siis tema horisontaalsuunaline kiirus läheneva Richardi suhtes on  $v + w$ . Peab kehtima võrdus

$$(v + w)t = l.$$

Avaldades esimesest võrdusest  $t$  ja teisest  $w$  leiame

$$w = l\sqrt{\frac{g}{2(H - h)}} - v \approx 4,7 \text{ m/s}.$$

## 2. (PUDEL) (6 p.) Autor: Jarl Patrick Paide

Toa jahedam õhk jahutab pudelit võimsusega  $P$  saades pudelilt aja  $t$  jooksul energia  $\Delta Q = Pt$ . Pudeli temperatuur muutub selle aja jooksul  $\Delta T = \Delta Q/c$  võrra. Ideaalse gaasi olekuvõrrandist  $PV = nRT$  saame temperatuuri muutusest rõhu muutuse  $\Delta p = \frac{R\Delta T}{V_m}$ . Pannes seosed kokku saame, et  $P = \frac{\Delta pcV_m}{Rt}$

## 3. (LÄÄTS JA EKRAAN) (8 p.) Autor: Oleg Košik

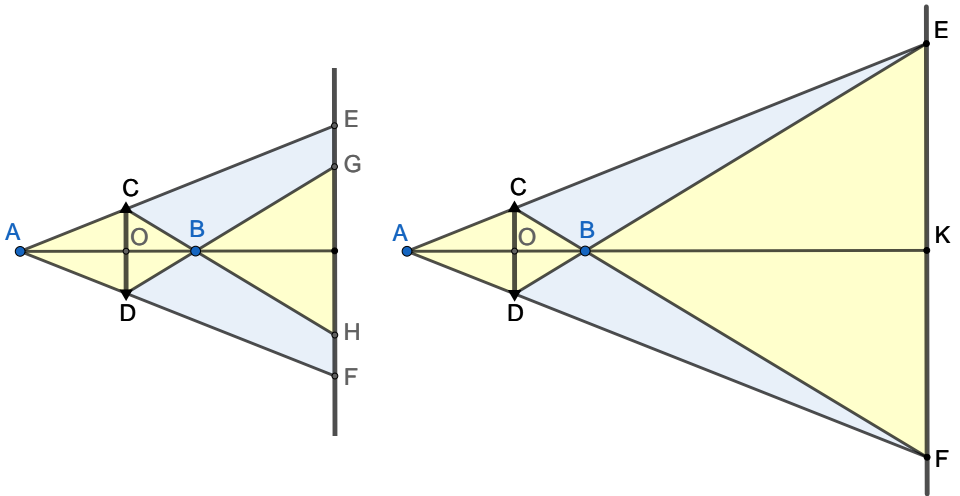
Olgu  $A$  valgusallikas,  $B$  tema kujutis läätses ning  $CD$  lääts.

Kui ekraan asub läätsesest 10 ja 60 cm vahel, tekivad ekraanile kaks kontsentrilist ringi (vasakpoolne joonis): hele väiksem ring diameetriaga  $GH$  asub tumeda ringi diameetriga  $EF$  sees. Aladele  $EG$  ja  $HF$  valgusallika valgus ei jõua.

Eemaldades läätses ekraanist saavad punktid  $E$  ja  $G$  kokku üheks nagu ka punktid  $F$  ja  $H$ . Ekraani katab ühtlaselt valgus, nagu läätses poleks (parempoolne joonis).

Olgu  $x = |AO|$  kaugus valgusallika ja läätses vahel,  $r = |OC|$  läätses raadius ning  $R = |KE|$ . Ülesande tingimustest  $|BO| = 10$  cm,  $|KO| = 60$  cm ning seega  $|BK| = 50$  cm. Sarnastest kolmnurkadest  $AOC$  ja  $AKE$  saame

$$\frac{r}{R} = \frac{x}{x + 60}.$$



Sarnastest kolmnurkadest  $BOD$  ja  $BKE$  aga

$$\frac{r}{R} = \frac{10}{50}.$$

Kokkuvõttes saame võrrandi  $\frac{x}{x+60} = \frac{10}{50}$ , mille lahendiks on  $x = 15$  cm.

Läätse valemist nüüd

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = 6 \text{ cm.}$$

#### 4. (SÕIT JÄÄL) (8 p.) Autor: Richard Luhtaru

Kui auto mass on  $m$ , siis auto raskusjõud on  $F_g = mg$  ja maksimaalne ratastele mõjuv hõõrdejõud on  $F_h = \mu mg$ . Maksimaalne autole mõjuda saav kiirendav/pidurdav jõud on maksimaalne hõõrdejõud (muidu hakkaksid rattad libisema), seega auto maksimaalne kiirendus on  $a_{max} = \frac{F_h}{m} = \mu g$  ja minimaalne kiirendus on  $a_{min} = -\frac{F_h}{m} = -\mu g$ .

On ilmne, et minimaalse sõiduaja korral kiirendab auto kõigepealt maksimaalse kiirendusega  $a_{max}$  ja seejärel pidurdab kiirendusega  $a_{min}$ , nii et auto jääks täpselt tee lõpus seisma. Tõepoolest, kui auto kiirendus ei oleks mingil hetkel maksimaalne/minimaalne võimalik, saaks auto sellel ajaperioodil lühikese aja maksimaalselt kiirendada ja pidurdada, vähendades sõiduaega. Kuna  $\mu_2 > \mu_1$ , siis on maksimaalne kiirendus suurem teisel lõigul ja seega ka kiirendamine muutub pidurdamiseks tee teisel lõigul.

Kulugu autol aeg  $t_1$ , et jõuda tee keskele, seejärel aeg  $t_2$  jõudmaks kohta, kus kiirendamine muutub pidurdamiseks, ja seejärel aeg  $t_3$ , et jõuda tee lõppu. Vastavad auto kiirendused on  $a_1 = \mu_1 g$ ,  $a_2 = \mu_2 g$  ja  $a_3 = -\mu_2 g$ .

Aja  $t_1$  jooksul läbib auto teepikkuse  $L$ , seega

$$L = \frac{\mu_1 g t_1^2}{2} \implies t_1 = \sqrt{\frac{2L}{\mu_1 g}} = 10 \text{ s.}$$

Tee keskele jõudes on auto kiirus

$$v_1 = \mu_1 g t_1 = \mu_1 g \cdot \sqrt{\frac{2L}{\mu_1 g}} = \sqrt{2L\mu_1 g} = 10 \text{ m/s.}$$

Seejärel peale aja  $t_2$  läbimist on auto kiirus

$$v_2 = v_1 + \mu_2 g t_2.$$

Et teise lõigu pikkus on samuti  $L$ , siis

$$L = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a_2} + \frac{0 - v_2^2}{2a_3} = \frac{2v_2^2 - v_1^2}{2\mu_2 g},$$
$$v_2 = \sqrt{\frac{2\mu_2 g L + v_1^2}{2}} \approx 12,25 \text{ m/s.}$$

Seega

$$t_2 = \frac{v_2 - v_1}{\mu_2 g} \approx 1,12 \text{ s.}$$

Kuna auto peab tee lõpus seisma jääma, siis

$$\Delta v = 0 \implies \mu_1 g t_1 + \mu_2 g t_2 - \mu_2 g t_3 = 0 \implies t_3 = t_2 + \frac{\mu_1}{\mu_2} t_1 \approx 6,12 \text{ s}$$

ja tee läbimise koguaeg on

$$t = t_1 + t_2 + t_3 \approx 17,24 \text{ s.}$$

## 5. (VÕIMSUS) (8 p.) Autor: Kaur Aare Saar

Vahetult pärast lüliti sulgemist käitub kondensaator kui lühis. Järelikult on skeemi kogutakistus

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{2}{3R}} = \frac{3}{5} R$$

Pärast pika aja möödumist käitub kondensaator kui avatud lüliti. Seega takistus on

$$R = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}} = \frac{5}{3}R$$

Võimsused on seega vastavalt  $P = \frac{5V^2}{3R}$  ja  $P = \frac{3V^2}{5R}$ .

**6. (KEHA KERAL) (10 p.) Autor: Krister Kasemaa**

a) Vaatleme keha liikumist ümber  $\theta$  defineeritud ringjoone. Laiuskraadil  $\theta$  avaldub väikese keha tiirlemisraadius kujul

$$r = R \cos \theta$$

ja joonkiirus kujul

$$v = \omega r = \frac{2\pi}{T} r = \frac{2\pi R \cos \theta}{T}.$$

Nüüd saab avaldada tsentrifugaaljõu:

$$F_{\text{kesk}} = \frac{mv^2}{r} = \frac{m \left( \frac{2\pi R \cos \theta}{T} \right)^2}{R \cos \theta} = \frac{4m\pi^2 R \cos \theta}{T^2}.$$

Arvestades, et kaalule panustab ainult radiaalne tsentrifugaaljõu komponent

$$F_{\perp \text{kesk}} = \cos \theta F_{\text{kesk}} = \frac{4\pi^2 m R \cos^2 \theta}{T^2},$$

saab leida keha kaalu:

$$W = \frac{GmM}{R^2} - \frac{4\pi^2 m R \cos^2 \theta}{T^2} = m \left( \frac{GMT^2 - 4\pi^2 R^3 \cos^2 \theta}{R^2 T^2} \right).$$

b) Libisemist põhjustab tsentrifugaaljõu kera pinnaga tangentsiaalne komponent:

$$F_{\text{kesk}||} = \sin(|\theta|) F_{\text{kesk}} = \frac{4\pi^2 m R \cos \theta \sin(|\theta|)}{T^2} = \frac{2\pi^2 m R \sin(|2\theta|)}{T^2}.$$

Hõõrdeõud avaldub kujul

$$F_h = \mu W = \mu m \left( \frac{GMT^2 - 4\pi^2 R^3 \cos^2 \theta}{R^2 T^2} \right).$$

Seega, tasakaalu korral:

$$F_{\text{kesk}||} \leq \mu W,$$

$$\frac{2\pi^2 m R \sin(|2\theta|)}{T^2} \leq \mu m \left( \frac{GMT^2 - 4\pi^2 R^3 \cos^2 \theta}{R^2 T^2} \right)$$

ja järelikult

$$\mu \geq \frac{2\pi^2 R^3 \sin(|2\theta|)}{GMT^2 - 4\pi^2 R^3 \cos^2 \theta}.$$

### 7. (KOLMNURK) (10 p.) Autor: Jaan Kalda

Et osakesed liiguksid sirgjooneliselt, peaks see kolmnurk, mille tippudes need asuvad, jääma iseenesega sarnaseks. Et kolmnurga mediaanide lõikepunkt (massikesse) jääb väliste jõudude puudumise tõttu paigale, siis peavad kõigile osakestele mõjuvad resultantjõud mõjuma piki mediaane ning nende moodulid peavad olema võrdelised vastavate mediaanide pikkustega (siis on mediaanide kasvamise kiirused ja kiirused võrdelised mediaanide pikkustega ja kolmnurk jääb iseenesega sarnaseks).

Tähistame punktist  $C$  lähtuvad küljed vektoritega  $\vec{a}$  ja  $\vec{b}$ ; tipust  $C$  tõmmatud mediaan on  $(\vec{a} + \vec{b})/2$ ; sarnased avaldised saame ka ülejäänud mediaanide jaoks. Järelikult peavad osakestele mõjuvad resultantjõud avalduma kujul  $p(\vec{a} + \vec{b}) = kq_C(\frac{\vec{a}q_B}{a^3} + \frac{\vec{b}q_A}{b^3})$ , kus  $p$  on konstant (sama kõigi osakeste jaoks kirjutatud avaldiste puhul) ning  $k$  on Coulomb'i konstant. See võrdus kehtib ainult siis, kui  $\frac{q_B}{a^3} = \frac{q_A}{b^3}$ , st  $q_B b^3 = q_A a^3$ . Analoogselt leiame, et  $q_C c^3 = q_A a^3$ , st  $q_A a^3 = q_B b^3 = q_C c^3 \equiv Q$ .

Kasutades siindefineeritud suurust  $Q$  saame avaldada konstandi  $p = \frac{kQ}{a^3 b^3 c^3}$ ; sümmeetria tõttu on ilmne, et teiste osakeste jaoks saame täpselt samasuguse avaldise, nii nagu vajalik osakeste sirgjooneliseks liikumiseks. Seega: jah, iga kolmnurga puhul on võimalik osakeste sirgjooneline liikumine, vajalik on vaid rahuldada võrdus  $q_A a^3 = q_B b^3 = q_C c^3$ .

### 8. (VEESILINDER) (12 p.) Autor: Taavet Kalda

*Lahendus 1.* On selge, et kui veesammas ei kiireneks, oleks veesamba ülemise ja alumise punkti rõhkude vahe  $\rho gh \approx 1.2p_0$  ning veesamba haripunkti oleks negatiivne rõhk. Aga kuna veesammas hakkab ühtse kehana teatud kiirendusega  $a$  silindrist välja voolama (sest vesi on kokkusurumatu), siis liikudes veega kiirenevasse taustüsteemi, näeme et ülemise ja alumise punkti rõhkude vahe on tegelikult  $\rho(g - a)h$  ning see ei pea tingimata negatiivne olema.

Vee välja voolamise käigus on peamine küsimus see, et mis vee asemel silindri üleval olevasse ruumi alles jääb. Üks variant on, et vee taha jääb vaakummull.

Samas, kui vee rõhk langeb toatemperatuuril küllastunud veeauru rõhust madalamale, siis vee kontaktpinnas hakkab vesi aurustuma. Seega ei teki silindri ülemisse ossa mitte vaakum, vaid veeaurud rõhul  $p_v$ . Seega on veesamba ülemise ja alumise osa rõhkude vahe  $p_0 - p_v = \rho(g - a)h$  ning veesammas kiireneb kiirendusega  $a = g - (p_0 - p_v)/(\rho h) = 1,62 \text{ m/s}^2$ .

*Lahendus 2.* Vaatame veesambale mõjuvaid jõude. Olgu veesamba ristlõike pindala  $S$ . Siis alt mõjub õhurõhu poolt jõud  $p_0 S$ . Ülevalt sinna tekki küllastunud auru poolt jõud  $p_v S$ . Lisaks mõjub veesambale raskusjõud  $mg$ , kus veesamba mass on  $m = \rho h S$ . Newtoni II seaduse põhjal

$$ma = mg + p_v S - p_0 S,$$

kust leiame

$$a = g + \frac{(p_v - p_0)S}{m} = g + \frac{p_v - p_0}{\rho h}.$$

## 9. (VEDELIK PEEGLIL) (12 p.) Autor: Konstantin Dukatsj

*Lahendus 1.* Kui meil on vedelik kõvera peegli peal, käitub see vedelik nagu lääts, mille ühe poole kõverusraadius on sama peegli kõverusraadiusega ja teise poole kõverusraadius läheneb lõpmatusele. Kuna peegli laius on palju väikse kui  $l, h$ , siis on tegemist õhukese läätsega. Sellisel juhul läätse optiline tugevus

$$D_l = \frac{1}{f_l} = \frac{n - 1}{R},$$

kus  $n$  on vedeliku murdumisnäitaja ja  $R$  on peegli kõverusraadius<sup>1</sup>. Peegli optiline tugevus

$$D_p = \frac{1}{f_p} = \frac{2}{R},$$

kus  $f_p$  on peegli fookuskaugus. Kuna valguskiired läbivad läätse kaks korda (enne peegeldamist ja pärast), siis läätse tugevusega peab arvestama kaks korda. Konbineerides läätse ja peegli saame, et

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{k} = 2D_l + D_p,$$

---

<sup>1</sup>Tegu on läätsevalmistaja valemi erikujuga. Läätssevalmistaja valem annab üldjuhul sfääriliste pindadega läätse tugevuse:

$$D = \frac{1}{f} = (n - 1) \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n - 1)d}{nR_1R_2} \right],$$

kus  $f$  on läätse fookuskaugus,  $n$  on läätse materjali murdumisnäitaja õhu suhtes,  $R_1$  on valgusallikale lähema pinna kõverusraadius (koos märgikonventsiooniga),  $R_2$  on valgusallikale kaugema pinna kõverusraadius ja  $d$  on läätse paksus.

kus  $a$  on objekti kaugus läätsest ja peeglist ning  $k$  on kujutise kaugus läätsest ja peeglist. Avaldades  $D_l$  ja  $D_p$  saame, et

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{k} = \frac{2(n-1)}{R} + \frac{2}{R} = \frac{2n}{R}$$

Vee korral

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{h} = \frac{2n_v}{R} \implies R = hn_v.$$

Tundmatu vedeliku korral

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{h-l} = \frac{2n_x}{R}.$$

Avaldades  $n_x$  saame, et

$$n_x = \frac{(2h-l)}{2h(h-l)}R = \frac{(2h-l)}{2(h-l)}n_v \approx 1,50.$$

*Lahendus 2.* Vaatleme allikast tulevat kiirt, mis on vertikaali suhtes nurga  $\alpha$  all. Järelikult siseneb kiir vedelikku kaugusel  $a = \alpha h$  peegli sümmeetriateljest. Snelli seaduse kohaselt on kiire nurk vertikaali suhtest peale vedelikku sisenemist  $\frac{\alpha}{n}$ . Olgu kiire nurk peale peegli vastu peegeldumist  $\beta$ . Väikeste nurkade lähenduses on peegli pinna normaal nurga  $\frac{1}{2}(\frac{\alpha}{n} + \beta)$  all. Samas lõikub peegli pinna normaal sümmeetriateljega kaugusel  $R$ , kus  $R$  on nõguspeegli kõverusraadius. Seega,

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{n} + \beta \right) = \frac{a}{R} = \frac{\alpha h}{R},$$

järelikult

$$\beta = \frac{2\alpha h}{R} - \frac{\alpha}{n}.$$

Edasi, pärast peegeldumist ning vedelikust järjekordset väljumist on kiire nurk vertikaali suhtes

$$\gamma = \beta n = \frac{2\alpha n h}{R} - \alpha.$$

Seega saame, et kujutise kaugus peegli pinnast on

$$\frac{1}{d} = \frac{\gamma}{a} = \frac{\gamma}{\alpha h} = \frac{2n}{R} - \frac{1}{h}.$$

Kasutades saadud seost esialgses olukorras näeme, et

$$\frac{1}{h} = \frac{2n_v}{R} - \frac{1}{h}.$$

Teisisõnu,  $R = n_v h$ . Pärast tundmatu vedelikuga asendamist saame aga

$$\frac{1}{h-l} = \frac{2n}{R} - \frac{1}{h} = \frac{2n}{n_v h} - \frac{1}{h}.$$

Järelikult

$$n = \frac{2h-l}{h-l} \cdot \frac{n_v}{2} \approx 1,5.$$

## 10. (SIRGVOOL) (14 p.) Autor: Taavet Kalda

Olgu sirgvool piki  $z$ -telge. Ampère'i seadusest näeme et sirgvool tekitab magnetvälja tugevusega  $B_\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi r} I$ . Elektronile mõjub Lorentzi jõud  $\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$ . Selleks et  $v_z = \text{const}$ , peab elektroni radiaalne kiiruskomponent olema 0. Tõepoolest, kui see ei oleks 0, siis krüvireegli järgi oleks Lorentzi jõul  $z$ -sihiline komponent ning seega  $v_z$  ei saaks konstantne olla. Kuna magnetväli tööd ei tee, on elektroni kiirus konstantne ning seega  $v_\varphi = \text{const}$ . Tegu on liikumisega pikki heeliksit raadiusega  $r$ .

Näeme et Lorentzi jõule panustab ainult  $z$ -sihiline kiiruskomponent ning et krüvireegli järgi on  $F = ev_z B$  radiaalsuunaline. Lorentzi jõudu tasakaalustab kesktõmbekiirendus kujul

$$-\frac{m_e v_\varphi^2}{r} = ev_z B = ev_z \frac{I\mu_0}{2\pi r}.$$

Paneme tähele, et selle võrrandi lahendamiseks peab  $v_z$  olema negatiivne. Asendades  $v_\varphi^2 = v_0^2 - v_z^2$ , saame

$$m_e(v_z^2 - v_0^2) = ev_z \frac{I\mu_0}{2\pi}.$$

Tegu on ruutvõrrandiga, lahendiks saame

$$v_z = \frac{eI\mu_0}{4\pi m_e} \pm \sqrt{\left(\frac{eI\mu_0}{4\pi m_e}\right)^2 + v_0^2}.$$

Kuna  $v_z < v_0$ , on positiivne lahend ebafüüsikaline, st

$$|v_z| = v_0 \left( \sqrt{\left(\frac{eI\mu_0}{4\pi m_e v_0^2}\right)^2 + 1} - \frac{eI\mu_0}{4\pi m_e v_0^2} \right).$$



**E1.** (MAHLAKARP) (10 p.) Autor: Konstantin Dukats

Paneme paberilehe lauale ning selle peale asetame mahlakarbi (alusega  $a \times a$ ). Kui me lükkame joonlauaga horisontaalselt karbi põhja juurest, siis hakkab karp libisema. Kui me aga lükkame karbi ülemist osa, hakkab karp pöörlema. Mingil kõrgusel  $h$  on piirjuht, kus karp nii pöörleb kui ka libiseb. Sellel piirjuhul kehtib nii jõudude kui ka jõumomentide tasakaal. Jõudude tasakaalust saame, et joonlauuga lükkamise jõud  $F = \mu mg$ . Joonlauuga lükkamisel tekkivad jõumomendi tasakaalustab karbile mõjuva gravitatsioonijõu poolt tekitatud jõumoment:

$$Fh = mg\frac{a}{2}.$$

Kombineerides neid võrandeid saame, et

$$\mu = \frac{a}{2h}.$$

Ühe konkreetse AURA mahlakarbi ja paberilehe jaoks olid mõõtmistulemused järgmised:  $a = 7,0$  cm,  $h = 11,5$  cm ning  $\mu = 0,30$ . Kuna mahlakarbid ja paberilehed erinevad vähesel määral, siis hõõrdetegur peaks enamasti olema vahemikus 0,28–0,42.

**E2.** (MAJAPIDAMISPABER) (14 p.) Autor: Jaan Kalda

Lõikame paberist pika riba ja riputame otsapidi vette ning ootame seni, kuni vee mööda paberit „üles ronimine“ peatub. See võtab üsna kaua, vähemalt paar minutit. Mõõdame märgunud osa kõrguse  $h$  mõõdetuna kõrgusena vee-pinnast, olgu see nt  $h = 75$  mm. Pooride vahekauguse hindamiseks võime kasutada kapillaarrõhu valemit rõhu jaoks kõvera pinna all: paberi märgunud osa ülaseras vees on rõhk atmosfäärirõhust väiksem  $\Delta p = \rho gh$  võrra, kus  $\rho = 1$  g/cm<sup>3</sup>, selle peab kompenseerima kapillaarrõhk, mis oleks silindrilise toru ja täieliku märgamise puhul  $4\sigma/d$ . Suurusjärgulise hindamise puhul võime kasutada seda valemit asendades silindri diameetri  $d$  kiudude vahekaugusega. Saame  $4\sigma/d = \rho gh$ , millest  $d = 4\sigma/\rho gh \approx 0,4$  mm.

Sellega me ülehindasime  $d$  väärtust, sest esiteks, vesi ei märga paberikiude täielikult ja teiseks, kiududevahelised augud ei ole silinderjad ning see vähendab kapillaarrõhku.