Eesti koolinoorte 33. füüsika lahtine võistlus

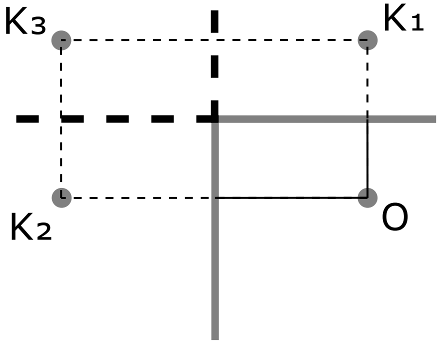
3. detsember 2022. a.
Noorema rühma lahendused (8.–10. klass)

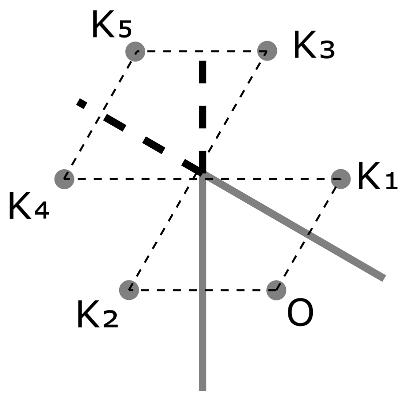
1. (*KAKS PEEGLIT*) (*8 p.*) *Autor: Hans Daniel Kaimre*

Vaatame neli juhtu eraldiseisvalt läbi ning teeme kindlaks, mitut kujutist igal juhul Riin näeb. Esimesel juhul (kõrvuti) töötavad kaks peeglit ekvivalentselt ühe suure tasapeeglina ning Riin näeb endast lihtsalt üht kujutist.

Teise (90° nurk) ja kolmanda (60° nurk) juhu uurimiseks teeme joonised. Lähendame Riinu ühe punktina, sest nii on lihtsam joonist teha ning seda järgida. 90-kraadise nurga korral tekib kolm kujutist: kaks ühekordsest peegeldusest (K_1 ja K_2) ning üks kahekordsest peegeldusest (K_3), kusjuures kolmas kujutis ühtib "objektide" K_1 ja K_2 jaoks.

60-kraadise nurga korral tekib viis kujutist: kaks ühekordsest peegeldusest (K_1 ja K_2), kaks kahekordest peegeldusest (K_3 ja K_4) ning üks kolmekordsest peegeldusest (K_5), kusjuures viies kujutis ühtib "objektide" K_3 ja K_4 jaoks.





Paralleelsete peeglite korral tekib lõpmatu arv kujutisi, sest peeglid peegeldavad kujutisi lõpmatu arv kordi. Küsiti aga juhtu, mille korral Riin **näeb** kõige rohkem kujutisi. Kuna Riin on nii objekt kui ka vaatleja ning ta keha ei ole lõpmatult väike, näeb ta terviklikult ainult esimest kujutist, sest järgnevate kujutiste nägemist blokeerib tema enda keha.

Seega näeb Riin kõige rohkem kujutisi (5) endast kolmandal juhul, kui peeglid on 60-kraadise nurga all.

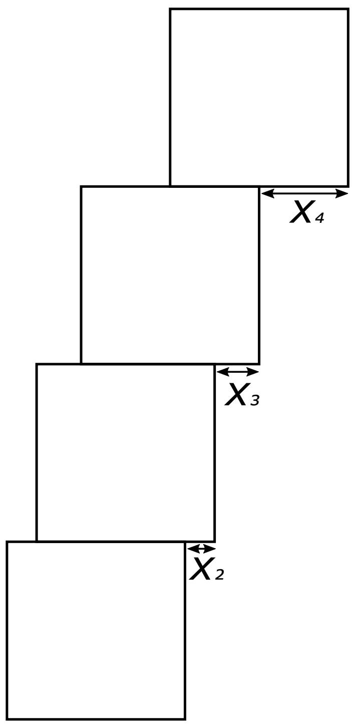
2. (*KLOTSID*) (*8 p.*) *Autor: Taavi Pungas*

Ülemine klots on kõige kaugemas asendis juhul, kui iga klotsi peal olev klotside grupp on tema serva peal täpselt tasakaalus, st grupi massikese asub täpselt serva ääre kohal.

Olgu klotsi i nihe alumise klotsi servaga võrreldes x_i.

Neljanda klotsi tasakaalu tingimus: $x_4 = \frac{a}{2}$ Kolmanda klotsi tasakaalu tingimus: $\frac{x_3+(x_3+x_4)}{2} = \frac{a}{2} => x_3 = \frac{a}{4}$ Teise klotsi tasakaalu tingimus: $\frac{x_2+(x_2+x_3)+(x_2+x_3+x_4)}{3} = \frac{a}{2} => x_2 = \frac{a}{6}$ Esimene klots on põrandal tasakaalus niigi.

Seega kõige ülemise klotsi nihe alumisega võrreldes on $x_2 + x_3 + x_4 = \frac{a}{2} + \frac{a}{4} + \frac{a}{6} = \frac{11}{12}a$ ehk 5.5 cm.



3. (*TITICACA JÄRV*) (*8 p.*) *Autor: Kaur Aare Saar*

Kuna järv on tasakaalus, siis sissetulev vee kogus peab olema võrdne väljamineva vee kogusega. Vett aurab kiirusega $v_a = \frac{A \cdot v}{1\,\text{aasta}} = \frac{8400 \cdot 2000}{1}\text{km}^2\text{mm/aasta} = \frac{8400 \cdot 2000 \cdot 1000000 \cdot 0.001}{3600 \cdot 24 \cdot 365.25}\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 532\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$. Järelikult voolab vett sisse kiirusega $v_s = v + v_a = 542\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$.

Kuna järv on tasakaalus, siis sissetulev soola kogus peab olema võrdne välja mineva soola kogusega. Sisse tuleb soola kiirusega $v_{\text{sool}} = c \cdot v_s = c_{\text{välja}} \cdot v$.

Järelikult $c_{\text{välja}} = c\frac{v_s}{v} = 10\frac{542}{10}\,\frac{\text{mg}}{\text{L}} = 542\,\frac{\text{mg}}{\text{L}}$.

4. (*VÕIDUSÕIT*) (*8 p.*) *Autor: Päivo Simson*

Tähistame viimase lõigu pikkuse $l = 10$ km, sinise auto edu punase ees $t_1 = 40$ s, ajavahemik vaheajapunktist tõrke tekkimiseni $t_2 = 240$ s ja kiirused $u = 108$ km/h ning $v = 110$ km/h.

a) Olgu raja kogupikkus L. Oletame, et sinisel autol kulus esimese lõigu (pikkusega $L - l$) läbimiseks aeg t. Punasel autol kulus sama lõigu läbimiseks järelikult aeg $t + t_1$. Autode keskmised kiirused avalduvad vastavalt

$$u = \frac{L - l}{t + t_1}, \quad v = \frac{L - l}{t}.$$

Ellimineerides siit tundmatu aja t saame

$$L = l + \frac{uvt_1}{v - u} = 76\,\text{km}.$$

b) Olgu vähim vajalik keskmine kiirus v_{min}. Sinine auto läbis viimasest vaheajapunktist tehnilise tõrke tekkimiseni vahemaa vt_2 ja läbida jäi järelikult vahemaa $l - vt_2$. Selleks kulub aeg

$$t_{sinine} = \frac{l - vt_2}{v_{min}}.$$

Hetkeks, mil sinisel autol tekkis tõrge, oli punane auto jõudnud vaheajapunktist kaugusele $u(t_2 - t_1)$ ja läbida jäi veel vahemaa $l - u(t_2 - t_1)$. Selleks kuluv aeg

$$t_{punane} = \frac{l - u(t_2 - t_1)}{u}.$$

Et sinine auto punasele ei kaotaks, peavad saadud ajad olema vähemalt võrdsed. Siit saame seose

$$\frac{l - vt_2}{v_{min}} = \frac{l - u(t_2 - t_1)}{u},$$

millest

$$v_{min} = u\frac{l - vt_2}{l - u(t_2 - t_1)} = 72\,\mathrm{km/h}.$$

5. (*TEE PIIMAGA*) (*10 p.*) *Autor: Jarl Patrick Paide*

Alguses toimub soojusvahetus tassi ja tee vahel ning tee langeb temperatuurile t_4. Leiame t_4 väärtuse.

$$c_v m_v (t_2 - t_4) = c_t (t_4 - t_1) \implies t_4 = \frac{c_v m_v t_2 + c_t t_1}{c_v m_v + c_t} = 84{,}6\,^\circ\mathrm{C}$$

Seejärel toimub jahtumine ja tee langeb temperatuurile t_5, kus peale soojuslikku tasakaalustumist külma piimaga saavutab tee temperatuuri 50 °C. Leiame t_5 väärtuse.

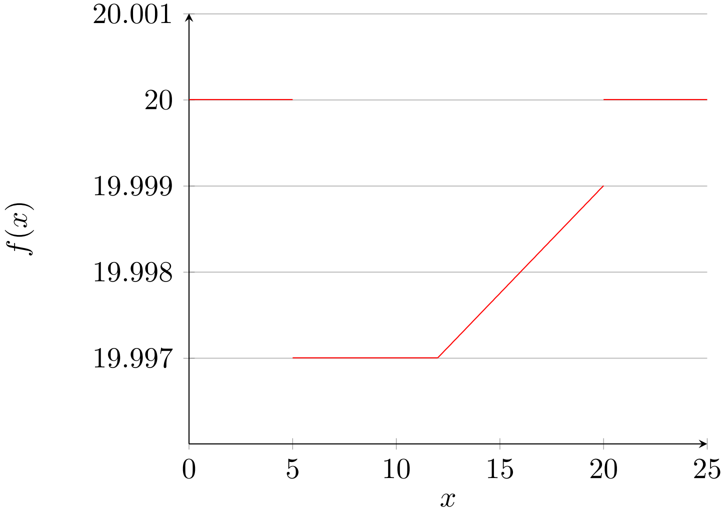
$$(c_v m_v + c_t)(t_5 - t_0) = c_p m_p (t_0 - t_3) \implies$$
$$t_5 = \frac{t_0(c_v m_v + c_t) + c_p m_p (t_0 - t_3)}{c_v m_v + c_t} = 61{,}5\,^\circ\mathrm{C}$$

Jahtumine toimub temperatuurilt t_4 temperatuurile t_5. Saame graafikult lugeda, et temperatuur t_4 on umbes ajahetkel $107s$ ja temperatuur t_5 on umbes ajahetkel $328s$, seega jahtumiseks kulub aega umbes $221s$.

6. (*HEELIUMI HINGAMINE*) (*10 p.*) *Autor: Jonatan Kalmus*

Heelimile, mis on õhupalli sees, mõjub raskusjõud $F_H = \rho_H V_P g$ ning üleslükkejõud $F_{\ddot{U}} = \rho_A V_P g$, kus g on raskuskiirendus. Summarne jõud, mida pallis olev heelium Jukule avaldab, on seega $\Delta F = F_H - F_{\ddot{U}} = (\rho_H - \rho_A)V_P g$. Selline jõud tooks kaasa kaalu näidu muutuse $\Delta m = \frac{\Delta F}{g} \approx -4g$. Kuna peame arvestama ka õhupalli kesta massiga, on lõplik kaalu näidu muutus $\Delta M = \Delta m + m_K = -3g$.

Algselt seisab Juku kaalul ning tema kaalu näit on tema enda kaal. Kui ema talle õhupalli ulatab, muutub kaalu näit hetkeliselt ΔM võrra. Kui juku heelimu pallist kopsudesse hingab, ei muuda see kaalu näitu, kuna üleslükke jõu jaoks pole oluline, kas Heelium on Juku kopsudes või õhupallis - Juku enda ruumala kasvab heeliumit hingates täpselt nii palju kui õhupalli ruumala väheneb ning kogumass ei muutu. Rääkides kasvab kaalu näit lineaarselt, kuna heelim paisatakse ühtlaselt atmosfääri. Rääkimise käigus läheb kaotsi täpselt pool algsest heeliumist, seega kasvab kaalu näit $2g$ võrra. Kui Jukul pall järelejäänud heeliumiga käest lendab, muutub kaalu näit algseks tagasi. (joonis allpool)



7. (*TEADMATA HULK TAKISTEID*) (*10 p.*) *Autor: Eero Vaher*

Olgu takisteid kokku N, A ja B vahel m ning C ja A vahel $N-m-1$. Takistus punktide A ja B vahel tuleneb kahest rööbiti ühendatud harust. Ühes on m takistit, teises $N-m$. Järelikult $R_{AB} = m(N-m)R^2/\left(mR+(N-m)R\right) = m(N-m)R/N$, millest saame avaldada $N = 3m^2/(3m-4)$. Sarnaselt $R_{AC} = (m+1)(N-m-1)R/N$ ehk $(m+1)(N-m-1)/N = 5/6$. N asendamisel eelnevalt leitud avaldisega saame ruutvõrrandi $3m^2 - 10m - 8 = 0$, mille lahendid on $m_1 = 4$ ning $m_2 = -2/3$. m_2 on ilmselgelt võõrlahend, seega $m = 4$ ning $N = 6$.

8. (*ELEKTRONID*) (*12 p.*) *Autor: Jaan Kalda*

Esimese sammuna leiame, milline kogulaeng läbib mõttelist juhtme ristlõiget poolperioodi jooksul: voolutugevus $I = P/U \approx 4{,}3\,\mathrm{A}$ ja $Q = I/2f \approx 43\,\mathrm{mC}$. Sellele vastav elektronide arv $N = Q/e \approx 2{,}7 \cdot 10^{17}$. Küsitud vahemaa leiame kui sellise traadijupi pikkuse, kus on N juhtivuselektroni. N elektronile vastab N vase aatomit kogumassiga $m = NM/N_A = 29\,\mathrm{mg}$ ja koguruumalaga $V = m/\rho \approx 3{,}2\,\mathrm{mm}^3$ Vastava juhtmeosa pikkus on järelikult $a = V/S \approx 3{,}2\,\mathrm{mm}$.

9. (*TIHEDUS*) (*12 p.*) *Autor: Kaarel Kivisalu*

Olgu temperatuur lõpphetkel t. Energia tasakaal:

$$\lambda m_j + (c_v m_j + c_m m_m)(t - t_j) = m_v c_v (t_v - t).$$

Kasutame nüüd temperatuuri tähistamiseks Kelvineid ja trükitähti. Järelikult

$$T = \frac{c_v m_v T_v + (c_v m_j + c_m m_m)T_j - \lambda m_j}{c_v(m_j + m_v) + c_m m_m} = 297{,}15\,\mathrm{K}.$$

Ehk $t = 24\,^\circ\mathrm{C}$. Graafikult lugedes $\rho(24\,^\circ\mathrm{C}) = 0{,}9973\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ ja $\rho(50\,^\circ\mathrm{C}) = 0{,}9880\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$.

Jääkuubiku ruumala koos mündiga

$$V = \frac{m_j}{\rho_j} + \frac{m_m}{\rho_m} = 55{,}97\,\mathrm{cm}^3.$$

Selle keskmine tihedus on

$$\rho = \frac{m_m + m_j}{V} = 0{,}982\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} < \rho_v,$$

seega jääkuubik algselt ujub.

Jõudude tasakaal alghetkel:

$$(m_j + m_m)g = \rho_v(t_v)\Delta V g$$
$$\implies \Delta V = \frac{m_j + m_m}{\rho_v(t_v)} = 54{,}66\,\mathrm{cm}^3,$$

kus ΔV on väljatõrjutud vee ruumala. Veetase alghetkel

$$h = \frac{\frac{m_v}{\rho_v(t_v)} + \Delta V}{S} = \frac{m_v + m_j + m_m}{\rho_v(t_v)S} = 6{,}43\,\mathrm{cm}.$$

Veetase lõpphetkel

$$h' = \frac{\frac{m_m}{\rho_m} + \frac{m_v + m_j}{\rho_v(t)}}{S} = \frac{m_v + m_j + m_m\frac{\rho_v(t)}{\rho_m}}{\rho_v(t)S} = 6{,}28\,\mathrm{cm}.$$

Veetaseme muutus

$$\Delta h = h' - h = 0{,}15\,\mathrm{cm}.$$

10. (*NURK*) (*12 p.*) *Autor: Kaarel Hänni*

Taandame ülesande esmalt leidmisele, milline on maksimaalne nurk, mille võrra antud lääts kiirt murda suudab. Kui lääts ei murra ühtegi kiirt rohkem kui nurga β võrra, siis koridori nurk ei saa olla (peaaegu üldse) väiksem kui $180^\circ - \beta$, sest nii spiooni kui koera kaugus nurgast on palju suuremad nende mõõtmetest. Kui aga leidub viis, kuidas läätse punkti X läbimine murrab mingist suunast tulevat kiirt nurga β võrra, siis saab paigutada läätse koridori nurga juurde ja pöörata see sellisesse asendisse, et ühelt poolt tulev seinaga (ja põrandaga) paralleelne punkti X läbiv kiir murdub β võrra (ja jääb ka pärast murdumist põrandaga paralleelseks). Kuna läätse mõõtmed on võrreldes nii spiooni kui koera mõõtmetega väikesed, siis kui koridori nurgaks on $180^\circ - \beta$, siis (kui spioon täpselt parajalt kõrguselt vaatab) läbib selline spiooni silmast lähtuv kiir koera. Täpselt vastassuunaline koeralt lähtuv kiir jõuab seega spiooni silma. Nende kahe väite kombineerimisel saame, et koridori minimaalne võimalik nurk on $180^\circ - \beta$, kus β on maksimaalne nurk, mille võrra kiir läbi läätse minnes murduda saab.

Olgu läätse keskpunkt O. Vaatleme maksimaalse nurga võrra murduvat kiirt; langegu see läätsele punktis X. Olgu Y kiirega paralleelse läätse keskpunkti läbiva kiire ja läätse fokaaltasandi lõikepunkt. Kuna paralleelne kiirtekimp koondub fokaaltasandil samasse punkti ja kuna põiknurgad on võrdsed, siis murdub see kiir täpselt $\angle XYO$ võrra. Kui lääts pole kiire ja sirge OX defineeritud tasandiga risti, siis saab läätse telje OX ümber selle tasandiga risti keerates väiksema $|OY'|$ (aga samal sirgel), mistõttu saab ka suurema $\angle XY'O$. Kuna vaatlesime juba algusest maksimaalse nurga võrra murduvat kiirt, on see võimatu, nii et lääts peab olema kiire ja sirge OX defineeritud tasandiga risti. Selle kiirega paralleelset kiirtekimpu, mis langeb läätsele sirgel OX, vaadeldes näeme, et punkt X peab olema läätse äärel.

Me teame praeguseks, et maksimaalse nurga võrra murduv kiir langeb läätse äärel olevale punktile ja sellisest suunast, et kiire ja sirge OX defineeritud tasand P on läätse tasandiga risti. Paneme tähele, et iga punkti Y'' jaoks, mis on P ja läätse fokaaltasandi ühisosas (kutsume seda sirgeks ℓ), saab valida kiire, mis langeb läätsele punktis X ja läbib punkti Y'' (selle saab unikaalselt konstrueerida teiselt poolt tuleva Y'' ja X läbiva kiire pööramisega). Maksimaalse nurga võrra murduval kiirel peab seega olema Y see punkt sirgel ℓ, mille jaoks on $\angle XYO$ suurim võimalik. Paneme tähele, et ℓ ja OX on paralleelsed sirged vahekaugusega f. Piirdenurga ja kesknurga seost kasutades on $\angle XY''O$ maksimaalne, kui kolmnurga $XY''O$ ümberringjoone raadius on minimaalne, See juhtub siis, kui ringjoon puutub sirget ℓ (ringjoont suuremaks libistades läbib kõik muud punktid sirgel ℓ) mis juhtub siis, kui $XY'' = OY''$. Siit järeldame, et XYO on võrdhaarne kolmnurk alusega r ja kõrgusega f. Siit $\angle XYO = 2 \arctan\left(\frac{r/2}{f}\right) \approx 28{,}07^\circ$, kust $\alpha \approx 180^\circ - 28{,}07^\circ \approx 152^\circ$.