

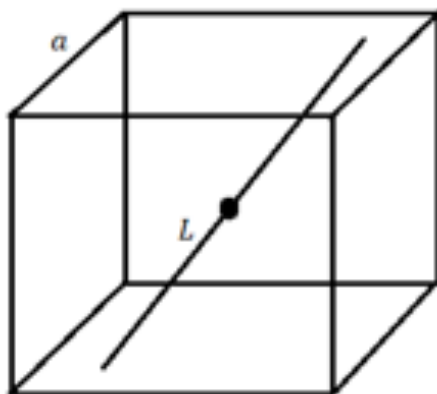
Füüsikaliste konstantide loend

Valguse kiirus vaakumis	c	$=$	$299\,792\,458\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Vaakumi magnetiline läbitavus	μ_0	$=$	$4\pi \times 10^{-7}\text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Vaakumi elektriline läbitavus	ε_0	$=$	$8.854\,187\,817\, \dots \times 10^{-12}\text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Elementaarlaeng	e	$=$	$1.602\,176\,620\,8(98) \times 10^{-19}\text{ A} \cdot \text{s}$
Elektroni mass	m_e	$=$	$9.109\,383\,56(11) \times 10^{-31}\text{ kg}$
Prootoni mass	m_p	$=$	$1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27}\text{ kg}$
Neutroni mass	m_n	$=$	$1.674\,927\,471(21) \times 10^{-27}\text{ kg}$
Aatommassiühik	m_u	$=$	$1.660\,539\,040(20) \times 10^{-27}\text{ kg}$
Rydbergi konstant	R_∞	$=$	$10\,973\,731.568\,508(65)\text{ m}^{-1}$
Gravitatsioonikonstant	G	$=$	$6.674\,08(31) \times 10^{-11}\text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Gravitatsioonikiirendus	g	$=$	$9.81\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Plancki konstant	h	$=$	$6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34}\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Avogadro arv	N_A	$=$	$6.022\,140\,857(74) \times 10^{23}\text{ mol}^{-1}$
Universaalne gaasikonstant	R	$=$	$8.314\,4598(48)\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Molaarmassi konstant	M_u	$=$	$1 \times 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
Boltzmanni konstant	k_B	$=$	$1.380\,648\,52(79) \times 10^{-23}\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Stefan-Boltzmanni konstant	σ	$=$	$5.670\,367(13) \times 10^{-8}\text{ kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$

Erinevad ülesanded (10 punkti)

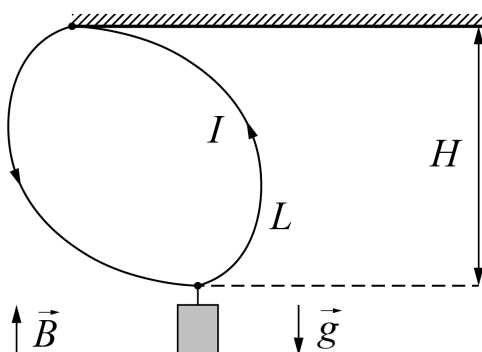
Osa A. Võnkumised kuubis (2,5 punkti)

- A.1** Liikumatu kuubi, mille küljepikkus on a ja mis on ühtlaselt laetud laengutihe-
 dusega ρ , keskpunkti läbib kitsas sirge kanal. Kaugus kuubi keskpunktist kuni
 2.5pt
 kanali ristumiseni tahkudega on võrdne L . Kanalis paikneb osake massiga m ja
 laenguga q . Leidke osakese väikeste võnkumiste periood keskpunkti läheduses.
 Osakese ja kuubi gravitatsioonilist vastasmõju võib mitte arvestada. Kuubi ja
 osakeste laengud on erinimelised.



Osa B. Rippumine magnetväljas (3,0 punkti)

- B.1** Painduv kaalutu juhe vooluga I moodustab silmuse, mille ülemine punkt on
 3.0pt
 kinnitatud lakke ning alumise punkti külge on riputatud koormis. Poole silmuse
 pikkus on L . Silmus paikneb vertikaalses magnetväljas B , mille mõjul saavutas
 süsteem stabiilse tasakaalu, milles lae riputuskoht ja koormise riputuspunkt ei
 asu ühel verikaalil. Leidke pinge T juhtmes ja koormise kaal P , kui lae ja silmuse
 alumise punkti vaheline kaugus on H .



Osa C. Varras magnetväljas (4,5 punkti)

- C.1** Risti homogeense magnetväljaga \vec{B} paikneb kaalutu varras pikkusega $2R$, mille otstes on kinnitatud kaks ühesugust väikest kuulikest massiga m ja laenguga q . Suuname z -telje piki magnetvälja ning paigutame koordinaatide alguspunkti varda keskpunkti. Kuulikestele antakse ühesugused kiirused v nii, et need oleksid suunatud vastassuunas ja ühe suund kattub z -telje suunaga. Leidke kuulikeste maksimaalsed koordinaadid z_{max} . Vastus avaldage suuruste q, B, m, v ja R kaudu. Leidke kuulikeste kiirenduste absoluutväärtused sellel hetkel, vastus avaldage suuruste q, B, m, v, R ja z_{max} kaudu. 4.5pt

Anisotroopne hõõrdumine (10 punkti)

Hõõrdejõud ei ole alati isotroopne. Sageli võib hõõrdejõu suurus ja suund sõltuda keha liikumissuunast. Näiteks anisotroopne hõõrdumine võib tekkida, kui keha kontaktpinnal on teatud suunas "sooned" (on teada, et kahe tammepuidu vaheline hõõrdetegur piki ja risti kiudu on vastavalt 0,48 ja 0,34). Hõõrdumise anisotroopia võib põhjustada ebatavalisi liikumisomadusi, mida me selles ülesandes uurime.

Mida on vaja teada anisotroopse hõõrdumise kohta

Oletame, et teatud pind on valmistatud anisotroopsest materjalist. Anisotroopse hõõrdumise ühe levi-
 numa mudeli järgi on meil sellised üksteise suhtes risti paiknevad teljed X ja Y (mida me nimetame peamisteks), et kehale mõjuv hõõrdejõud \vec{F} sõltub keha liikumissuunast järgmiselt:

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{|N|}{|v|} \mu_x v_x \\ F_y &= -\frac{|N|}{|v|} \mu_y v_y \end{aligned} \quad (1)$$

kus F_x ja F_y on hõõrdejõu projektsioonid, N on kehale mõjuv toereaktsioonijõud, v_x ja v_y on kiirusevektori \vec{v} projektsioonid, μ_x ja μ_y on hõõrdetegurid piki peamisi telgesid.

Siin ja edasi eeldame, et tasandi koordinaatteljed ühtivad peamiste telgedega. Hõõrdetegurid on $\mu_x = 0,75$ ja $\mu_y = 0,5$, kui ei ole märgitud teisiti.

A ja B osas võib keha pidada punktmassiks. Tasapind, millel kehad liiguvad, on kõigis ülesande osades horisontaalne.

Kõigis ülesande osades, kus see on võimalik, leidke ka arvuline vastus.

A osa. Keha liikumine horisontaalsel pinnal (4,0 punkti)

A.1	Millise nurga α_1 all X -telje suhtes peab olema suunatud keha kiirusvektor, et hõõrdejõu võimsuse absoluutväärtus oleks maksimaalne?	0.5pt
A.2	Millise nurga α_2 all X -telje suhtes peab olema suunatud keha kiirusvektor, et hõõrdejõu võimsuse absoluutväärtus oleks maksimaalsest 1,2 korda väiksem?	0.5pt
A.3	Oletame, et keha algkiiruse projektsioonid on $v_{0x} = 1$ m/s ja $v_{0y} = 1$ m/s. Mõne aja pärast on kiiruse projektsioon Y -teljele $v_{1y} = 0,25$ m/s. Mis on sel ajahetkel keha kiiruse absoluutväärtus?	1.0pt
A.4	Olgu kiirus $v_2 = 1,0$ m/s. Millise nurga α_3 all X -telje suhtes peab olema suunatud keha kiirusvektor, et trajektoori kõverusraadius oleks minimaalne? Mis on selle kõverusraadiuse väärtus? Vaba langemise kiirendus on $g = 9,8$ m/s ² .	1.0pt
A.5	Skitseerige ühele joonisele keha trajektoolid XY tasandil stardinurkadega $\alpha_4 = \pi/6$ ja $\alpha_5 = \pi/3$ eelnevalt kirjeldatud hõõrdetegurite väärtuse korral. Algiirused on samad. Lahendage sama ülesanne hõõrdetegurite $\mu_x = 0,4$ ja $\mu_y = 0,7$ korral.	1.0pt

B osa. Keha liikumise hakkamise tingimused (2,0 punkti)

- | | | |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| B.1 | Keha massiga m asub koordinaatide alguspunktis. Sellele avaldatakse jõudu, mis on suunatud nurga α all X -telje suunas. Jõu suurus $F(t) = \gamma t$ kasvab ajas lineaarselt. Leidke keha liikuma hakkamise ajamomendi sõltuvus nurgast α . Eeldage, et seisuhõõrdetegur on võrdne liugehõõrdeteguriga. | 2.0pt |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|

C osa. Ringjooneline liikumine (4,0 punkti)

Kaks ühesugust punktmassi massiga m asuvad anisotroopse hõõrdega pinnal ja on ühendatud kaalutu ja venimatu vardaga, mille pikkus on $L = 1$ m. Varras paikneb piki Y -telge ja ei puutu pinnaga kokku. Ühele kehale antakse algkiirus, mis on suunatud vardaga risti.

- | | | |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| C.1 | Leidke antud keha algkiiruse v_0 korral edasise kiiruse v sõltuvus varda pöördenurgast φ , eeldades, et edasisel liikumisel on teine keha paigal. | 1.5pt |
| C.2 | Leidke algkiiruse maksimaalne väärtus $v_{0\max}$, mille korral teine keha jääb paigale. | 1.5pt |
| C.3 | Millise vahemaa läbib keha kuni täieliku peatumiseni, kui selle algkiirus on $v_{0\max}$? | 1.0pt |

Lasertehnoloogiad

Ülesande lahendamisel kasutage järgmisi füüsikalisi konstante:

valguse kiirus vaakumis $c = 3.00 \cdot 10^8$ m/s;

Plancki taandatud konstant $\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34}$ J · s;

Coulomb'i konstant ja elektriline konstant $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \cdot 10^9 \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}$;

elementaarlaeng $e = 1.60 \cdot 10^{-19}$ C.

A osa. Klassikaline ülikiirguse mudel

Laserid on koherentse optilise kiirguse allikad. Laserkiirgus tekib tänu sellele, et suurel aatomite hulgal on toimunud välismõjutuse (pumpamise) abil üleminek ergastatud olekusse, mistõttu need kiirgavad ühesuguse faasi ja polarisatsiooniga footoneid. Laserkiirguse süsteemse teooria ülesehitamiseks tuleb kasutada kvantmehhaanikat, kuid selle mõningatest aspektidest võib aru saada ka klassikalise elektrodünaamikaga.

Vaatleme esmalt üksiku aatomi kiiratud footonit. Klassikalise elektrodünaamika vaatenurgast saab aatomit vaadelda kui dipoolset kiirgusallikat. Selles mudelis koosneb dipool positiivse laenguga $+q$ liikumast aatomituumast, mille ümber võngub harmooniliselt negatiivne laeng $-q$ (mis paikneb elektronpilve laengujaotuse keskel).

Sealjuures, aatomi dipoolmoment võngub vastavalt seosele $\vec{p}(t) = \vec{p}_m(t) \cos(\omega t + \varphi)$. Võngete ringsagedus ja kiirguvate footonite energia on seotud Plancki seosega $E_\gamma = \hbar\omega$. Edaspidises tekstis tähistab footonite sagedus nende ringsagedust. Vahelduva dipoolmomentidega $\vec{P}(t)$ klassikalise süsteemi kiirgusvõimsust määratletakse valemiga

$$W = \frac{2k}{3c^3} \left\langle \left(\frac{d^2\vec{P}}{dt^2} \right)^2 \right\rangle, \quad (1)$$

kus nurksulud tähistavad keskmistamist üle võnkeperioodi.

- | | | |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| A.1 | Aatom kiirgab valgust lainepikkusega $\lambda_0 = 300$ nm. Hinnake klassikalises mudelis aatomi kiirgamise aega τ (ehk aega, mille jooksul see kiirgab energia, mis on võrdne ühe footoni energiaga). Selle aja pikkus ühtib suurusjärgu poolest ajaga, mille jooksul aatom kiirgab ühe footoni. Kõiki kiirguseid tekitab üks elektron, mis asub tuumast umbes $a_0 = 0.1$ nm kaugusel. Avaldage oma vastus kasutades füüsikalisi konstante ning suurusi λ_0 ja a_0 . | 1.0pt |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|

Oletame, et lühiajalise pumpamise tulemusena on N aatomit mingis ruumiosas viidud ergastatud olekusse. On teada, et üks aatom kiirgab footoni sagedusega ω karakterse aja τ jooksul.

- | | | |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| A.2 | Hinnake N aatomi elektromagnetilise kiirguse koguvõimsust W_s spontaansel kiirgamisel ehk siis, kui aatomdipooli suund ja selle võnkefaas on määratud juhuslikult erinevatel aatomitel. Vastuseks kirjutage avaldis võimsuse jaoks kasutades suurusi N , ω ja τ . | 0.25pt |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|

- | | | |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| A.3 | Hinnake selle aatomite süsteemi spontaanse kiirguse impulsi kestust. Avaldage vastus samade suuruste kaudu. | 0.25pt |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|

A.4 Hinnake N aatomi elektromagnetilise kiirguse koguvõimsust W_i ülikiirguse režiimil ehk siis, kui aatomdipoolide suund ja nende võngete faasid ühtivad kõigil ergastatud olekus aatomitel. Vastuseks kirjutage avaldis võimsuse jaoks kasutades suurus N, ω ja τ . 0.5pt

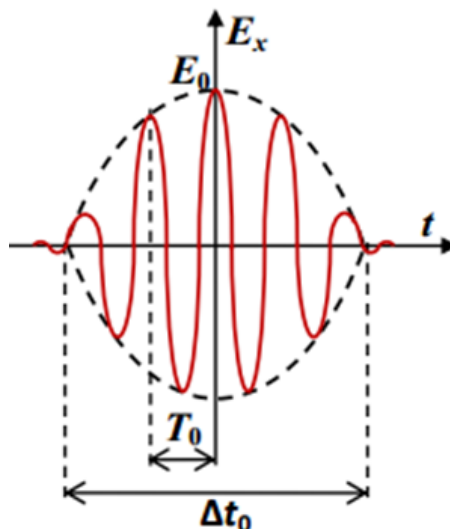
A.5 Hinnake aatomite süsteemi kiirgusimpulssi kestust ülikiirguse režiimis. Avaldage vastus samade suuruste kaudu. 0.25pt

B osa. Mittelineaarne optika ja pulsside kokkusurumine

Veel lühema kestusega pulsside saamiseks tuleb vähendada juba genereeritud laserpulsside kestust. Pulsi kestus Δt ja selle võngete sageduse hajuvus $\Delta\omega$ (spektraallaius) on seotud võrratusega $\Delta\omega\Delta t \geq 2\pi$. Ülikiirguse režiimil genereeritaval laserpulssidel juba on minimaalselt võimalik kestus, antud sageduste hajuvusega $\Delta t_0 \approx \frac{2\pi}{\Delta\omega_0}$. Seepärast saab pulsi kestust lühendada kahes etapis: esmalt suurendada pulsi spektraallaiust (kestust muutmata), seejärel pulss ajalisel kokku suruda.

Esimese ülesande populaarseim lahendusmeetod on sirtsuga impulsside kokkusurumine (ing keeles chirp). Selle meetodi aluseks on keskkonna mittelineaarsus ehk keskkonna murdumisnäitaja n sõltuvus laine elektrivälja võnkumisamplituudist E_m . Sõltuvus näeb välja $n = n_0 + n_2 E_m^2$, kus n_0, n_2 – konstandid, mis sõltuvad aine omadustest. Mittelineaarsed efektid on väikesed, näiteks kvartsis, valguse intensiivsusel $I_1 = 10^9 \text{ V/cm}^2$ suureneb murdumisnäitaja ainult $n_2 E_{m1}^2 \approx 3.2 \cdot 10^{-7}$ võrra. Elektromagnetilaine intensiivsust keskkonnas määratakse valemiga $I = \frac{\varepsilon_0 n_0 c}{2} E_m^2$.

Vaatleme pulssi kestusega Δt_0 ja väikese sageduste hajuvusega $\Delta\omega_0 \approx \frac{2\pi}{\Delta t_0}$, pulsi keskmine sagedus on ω_0 . Joonisel on näidatud sellise pulsi elektrivälja ligikaudne sõltuvus ajast. Lainemaksimumide liikumiskiirus on pulsi äärtes ühesugune, kuid keskosas väheneb mittelineaarsete efektide tõttu. Tänu sellele ei muutu pulsi üldkestus, sagedus pulsi "tagaosas" kasvab, "esiosas" - kahaneb. Sellised pulssid kutsutakse sirtsuga pulssideks.



B.1 Olgu laine kahe maksimumi amplituudid vastavalt E_{m1} ja E_{m2} . Leidke nende levimiskiiruste Δv erinevus. Vastus peab sisaldama n_0, n_2, c, E_{m1} ja E_{m2} . 0.5pt

B.2 Valguspulss lainepikkusega vaakumis $\lambda_0 = 300$ nm ja maksimaalse intensiivsusega $I_0 = 3 \cdot 10^9$ V/cm² levib piki kvartsist valgusjuhtme (fiibri) telge. Eeldage, et laine elektrivälja mähisjoone (ingl. k. envelop) ruudu sõltuvust ajast $E_m^2(t)$ on parabool. Määrake valgusjuhtme pikkus s , mille läbimisel impulsi spektraallaius suureneb $K = 200$ korda. Vastus peab sisaldama K, λ_0, n_2, E_m , lisaks leidke arväärtus meetrites, ümardatult täisarvuni. 2.0pt

Sirtsuga pulsi aja kokkusurumiseks saab selle läbi lasta keskkonnast, milles laine grupikiirus sõltub sagedusest. Keskmise sageduse ω_0 läheduses saab vaadelda keskkonnas esitada lainearvu sõltuvuse sagedusest: $k(\omega) = k_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{\beta_2}{2}(\omega - \omega_0)^2$, kus $\beta_1 = 5$ ns/m, $|\beta_2| = 20$ fs²/mm.

B.3 Milline peab olema β_2 märk selleks, et kirjeldatud skeemi alusel sirtsutud pulss hakkaks selles keskkonnas ajaliselt kokku tõmbuma? Vastuses märkide + või -. Edaspidi eeldage, et β_2 on just selle märgiga. 0.5pt

B.4 Leidke vahemaa, mida peab selles keskkonnas läbima pulss B2, kestusega $\Delta t_0 = 10$ ps ja esialgse spektraallaiusega $\Delta\omega_0 \approx 2\pi/\Delta t_0$ (enne sirtsu), et pärast sirtsu spektri laienemisel $K = 200$ korda saavutada minimaalne võimalik kestus. Vastusesse kirjutage valem kasutades füüsikakonstante ja suuruseid $K, \Delta t_0, \beta_1$ ja β_2 , lisaks leidke arväärtus meetrites, ümardatult täisarvuni. 1.0pt

B.5 Kui valguse intensiivsus on piisavalt kõrge, võib keskkonna mittelineaarsuse tõttu puududa valguskiire difraktsiooniline hajumine. Hinnake valguspulsi minimaalset võimsust W_c , mille puhul valgus ei difrageeru, st valgus levib konstantse raadiusega kitsas silindrikujulises kanalis. Vastuseks kirjutage W_c jaoks valem, kasutades füüsikakonstante, sagedust ω_0, n_0 ja n_2 . Eeldage, et intensiivsuse jaotumine üle kanali ristlõike on ligikaudselt ühtlane. Leidke kvartsis leviva pulsi, mille lainepikkus vaakumis on $\lambda_0 = 300$ nm, võimsuse arväärtus. Koefitsient $n_0 = 1.47$. 1.5pt

C osa. Eksoplaneedid

Astronoomias jälgitakse valgust kiirgavaid objekte pikkade perioodide vältel. Läbi selle on võimalik uurida nende kiirgusspektrite muutusi. Spektraalmõõtmistega on võimalik avastada eksoplaneete s.t. planeete, mis tiirlevad ümber kaugelasuvate tähtede. Eksoplaneedid ei kiirga, seepärast uuritakse nende tähtede kiirgusspektrit. Kui eksoplaneedi vaatesiht Maalt jääb praktiliselt eksoplaneedi orbitaaltasandisse, siis võib taolise eksoplaneedi leida tähe heleduse vähenemise järgi, kui eksoplaneet liigub tähe eest läbi. Samas, kui orbiidi tasapind on Maa sihi suhtes nurga all, siis selline meetod ei toimi.

C.1 Pakkuge välje meetod, mis võimaldab tähespektri optilist diapasooni uurides avastada eksoplaneete, mille orbiidid on arvestatava nurga all vaatesihi suhtes. Vastuseks kirjutage füüsikaline nähtus, millele teie meetod tugineb. 1.0pt

- C.2** Oletame, et eksoplaneet massiga m tiirleb ümber tähe, mille mass on M , mööda ringjoonelist orbiiti raadiusega R . Planeedi tiirlemisperiood on T , selle planeedi orbiidi tasapind on nurga θ all Maa vaatesihi suhtes. Hinnake suhtelise sageduse mõõtmistäpsust $\Delta\omega/\omega$, mis on vajalik sellise eksoplaneedi avastamiseks teie poolt välja pakutud meetodil. Avaldage suhtelise sageduse vajalik mõõtmistäpsus $\Delta\omega/\omega$ füüsikaliste konstantide ning suuruste R, T, θ, m ja M kaudu. 1.0pt
- C.3** Olgu eksoplaneedi ja selle tähe massid võrdsed vastavalt Maa ja Päikese massidega. Eeldage, et eksoplaneedi ringorbiidi raadius langeb kokku Maa ja Päikese vahelise kaugusega ($R \approx 1.5 \cdot 10^{11}$ m) ja nurk $\theta = 60^\circ$. Päikese mass on Maa omast 330 000 korda suurem ning Maa tiirlemisperiood ümber Päikese on 1 aasta. Leidke täisarv n , nii, et 10^{-n} – on suhtelise sageduse mõõtmistäpsus, mida vajate oma meetodi jaoks. Üliühikeste (femtosekundiliste) laserpulsside kasutamine võimaldab mõõta sagedusi optilises diapasoonis (10^{15} Hz) täpsusega 10 Hz. Kas sellest täpsusest piisab eksoplaneedi registreerimiseks? 0.25pt