Eesti koolinoorte 63. füüsikaolümpiaad

27. veebruar 2016. a. Piirkondlik voor.

Gümnaasiumi *ülesannete lahendused*

Eessõna

Allpool on toodud iga ülesande üks õige lahenduskäik (mõnel juhul ka enam). Kõik alternatiivsed õiged lahenduskäigud tuleb hinnata samuti maksimumhindega. Iga alternatiivse lahenduskäigu jaoks tuleb kontrollijatel koostada hindamisskeem, juhindudes võimalusel juuresoleva hindamisskeemi punktijagamisproportsioonist. Soovituslikud maha-arvamise punktid: numbriline arvutusviga — 0,5; viga teisendustes — 0,5 p. (märgi jms väiksem viga) või 1 p. (viga, mis viib dimensioonide konfliktini), maha arvata ainult üks kord, st edasikanduvat viga mitte karistada; kui vastus tuleb füüsikaliselt absurdne, siis võib täiendavalt karistada 0,5 punktiga; üksik viga lähtevalemis: 0,5 p. (kui märgiviga), kuni 50% (sisuline viga).

1. (*VOLTMEETRID*) (*6 p.*) Voltmeetrid mõõdavad alati pingelangu enda klemmidel, kusjuures pingelangud on määratud voltmeetrite takistustega. Olgu iga voltmeetri takistus R [**1 p.**]. Kogu skeemi takistus on $R_k = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}\right)^{-1} + R = \frac{5}{3}R$ [**2 p.**]. Pingelang esimesel voltmeetril on $U_1 = \frac{R}{R_k}U_0 = 18\,\mathrm{V}$ [**1 p.**]. Pingelang neljandal voltmeetril on $U_4 = U_0 - U_1 = 12\,\mathrm{V}$ [**1 p.**] ning pingelangud teisel ja kolmandal voltmeetril on $U_2 = U_3 = \frac{U_4}{2} = 6\,\mathrm{V}$ [**1 p.**].

2. (*KÖIEVEDU*) (*6 p.*) Olgu nööri tõmme T. Vastavalt Newtoni III seadusele on nööri tõmme mõlema mehe jaoks sama suur, kuid vastupidises suunas [**1 p.**]. Lisaks nööri tõmbele mõjub kummalegi mehele vastassuunas hõõrdejõud, mille maksimaalne väärtus on võrdeline raskusjõuga [**1 p.**]. Seetõttu hakkab esimesena liikuma kergem mees, kelleks on Oleg [**1 p.**].

Vaatame, millise maksimaalse kiirendusega hakkab Oleg liikuma. Jõudude tasakaal Eero jaoks:

$$T - \mu m_1 g = 0. \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

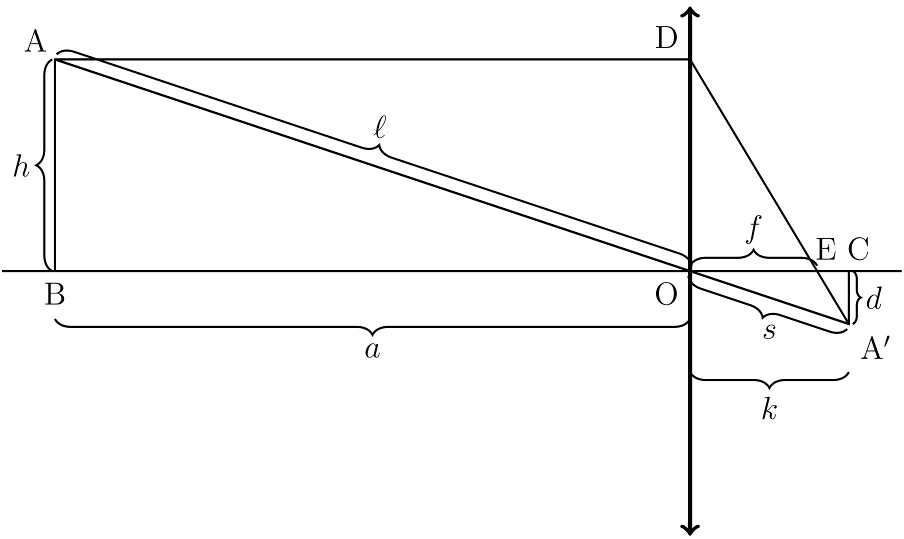
Olegi puhul kehtib aga Newtoni II seadus:

$$T - \mu m_2 g = m_2 a. \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

Avaldades esimesest võrrandist $T = m_1 g$ ja asendades teise võrrandisse, leiame

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_2}\mu g \approx 0{,}86\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}. \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

3. (*LÄÄTS*) (*8 p.*)



Sarnastest kolmnurkadest $\triangle ABO$ ja $\triangle A'CO$ saame $\frac{h}{l} = \frac{d}{s}$ [**2 p.**]. Kuna $\ell + s = 15\,\mathrm{cm}$, siis:

$$\frac{4\,\mathrm{cm}}{\ell} = \frac{1\,\mathrm{cm}}{15\,\mathrm{cm} - \ell} \quad \to \quad \ell = 12\,\mathrm{cm},\ \ s = 3\,\mathrm{cm}. \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

Täisnurksest kolmnurgast $\triangle A'CO$ saame $k^2 = \sqrt{s^2 - d^2}$ [**1 p.**]. Sarnastest kolmnurkadest $\triangle DOE$ ja $\triangle A'CE$ saame:

$$\frac{h}{f} = \frac{d}{k - f} \qquad [\mathbf{2\ p.}] \quad \to \quad f = \frac{hk}{h + d} \approx 2{,}26\,\mathrm{cm}. \qquad [\mathbf{2\ p.}]$$

Alternatiivne lahendus. ℓ ja s leiame sarnaselt eelmisele lahendusele [**3 p.**]. Seejärel leiame kujutiste kaugused läätse tasandist: $a = \sqrt{\ell^2 - h^2}$ [**1 p.**], $k = \sqrt{s^2 - d^2}$ [**1 p.**]. Fookuskauguse leiame läätse valemi abil:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f} \qquad [\mathbf{2\ p.}] \quad \rightarrow \quad f = \frac{ak}{a+k} \approx 2{,}26\,\mathrm{cm}. \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

4. (*KELK*) (*8 p.*) Olgu jõe ületamiseks vajalik kõrgus h ja Juku mass koos kelguga m. Startides on Jukul potentsiaalne energia $E_{pot} = mgh$ [**1 p.**], mis muundub kelgu liikumisel soojuseks hõõrdejõu kaudu [**1 p.**]. Kaldal tuleb Jukul läbida distants $s = h/\sin(\alpha)$. Hõõrdejõu väärtus kaldpinnal on $F_h = \mu_1 mg\cos(\alpha)$ [**1 p.**]. Hõõrdejõu poolt tehtud töö on $A_1 = F_h s = \mu_1 mgh/\tan(\alpha)$ [**1 p.**]. Jää peal tuleb läbida distants l ja hõõrdejõu poolt tehtud töö on $A_2 = \mu_2 mgl$ [**1 p.**]. Piirjuhul läheb kogu potentsiaalne energia soojusenergiaks:

$$E_{pot} = A_1 + A_2, \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

$$h = \frac{\mu_1 h}{\tan(\alpha)} + \mu_2 l,$$

$$h \cdot \left(1 - \frac{\mu_1}{\tan(\alpha)}\right) = \mu_2 l,$$

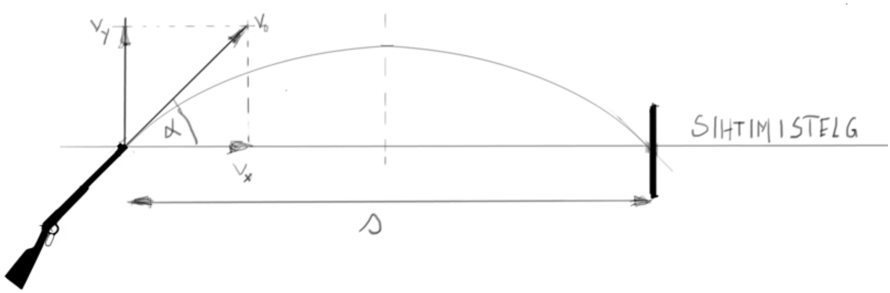
$$h = \frac{\mu_2 l \tan(\alpha)}{\tan(\alpha) - \mu_1} \approx 3{,}9\,\mathrm{m}. \qquad [\mathbf{2\ p.}]$$

5. (*SAUNAUKS*) (*10 p.*) Kerisele visatakse $n = m/\mu$ mooli vett [**1 p.**], mis aurustudes tekitaks hermeetiliselt suletud ruumis lisarõhu, mis on leitav gaasi seadusest: $\Delta p = nRT/V$ [**2 p.**]. See rõhk avaldab uksele jõudu $F = \Delta pA$ [**1 p.**]. See jõud mõjub ühtlaselt üle kogu ukse pinna, niisiis tuleb uksele mõjuva jõumomendi arvutamisel võtta jõu õlaks pool ukse laiusest [**1 p.**]. Et aga ust kinni hoides rakendaksid saunalised oma jõu F_1 käepidemele, kus jõu õlaks on terve ukse laius [**1 p.**], siis saame öelda, et saunalised peaksid ukse kinnihoidmiseks rakendama jõudu

$$F_1 = \frac{F}{2} = \frac{mRTA}{2\mu V} = 2500\,\mathrm{N}. \qquad [\mathbf{2\ p.}]$$

Leitud jõud on tõepoolest ebaloomulikult suur. Lisaküsimuse vastuseks võime öelda, et kerisel aurustunud sadakond liitrit veeauru surub üleliigse õhu igasugustest piludest kiiresti välja [**2 p.**] ja seetõttu märkimisväärset ülerõhku uksele ei avaldugi.

6. (*LASKETIIR*) (*10 p.*) Vastavalt ülesande tekstile ei arvesta me õhutakistust. Esmalt tuleb leida, missuguse nurga α all on relva vintraud suunatud ülespoole, et tabada märklaua keskmesse ehk "kümnesse" vintpüssi normaalse asendi korral. Kuuli trajektoor on sümmeetriline, seega kuuli kogu lennuaeg t on kaks korda suurem kui aeg t_{tipp}, mis kulub trajektoori kõrgeimasse punkti jõudmiseks (vt joonis).



Järgnevalt kirjeldame kuuli liikumist liikumisvõrranditega horisontaalse liikumise jaoks

$$s = v_x t$$

ja vertikaalse liikumise jaoks

$$v_y - g t_{tipp} = v_y - g\frac{t}{2} = 0,$$

kus g on raskuskiirendus 9,81 $\mathrm{m/s^2}$, s märklaua kaugus 30 m ning v_x ja v_y vastavalt horisontaal- ja verikaalsuunaline algkiirus. (*Kuuli trajektoori mõistmine ja liikumisvõrrandite kirjapanek* [**2 p.**]. *Joonise tegemine ei ole otseselt nõutud, kuid see lihtsustab ülesandest arusaamist. Seega joonise puudumist palun mitte karistada, kui see ei takista lahenduskäigust arusaamist.*)

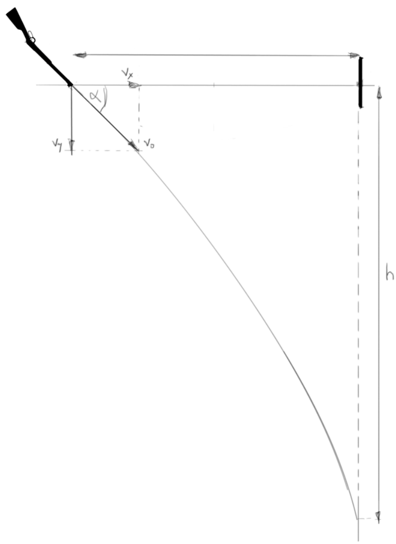
Neid kahte võrrandit kombineerides saame leida nurga α:

$$s = v_x t \Rightarrow t = \frac{s}{v_x},$$
$$v_y - g\frac{t}{2} = 0,$$
$$v_y - g\frac{s}{2v_x} = 0,$$
$$2v_x v_y = gs.$$

Avaldame viimses reas v_x ja v_y algkiiruse v_o ja trigonomeetriliste funktsioonide kaudu ning kasutame kahekordse nurga siinuse valemit $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Saame, et

$$2v_x v_y = gs,$$
$$2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha = gs,$$
$$v_0^2 \sin 2\alpha = gs,$$
$$\sin 2\alpha = \frac{gs}{v_0^2}.$$

(*Laskenurga, algkiiruse ja laskekauguse vahelise seoseni jõudmine* [**2 p.**].)



Kui nüüd keerata relva ümber sihtimistelje 180 kraadi, siis kui enne oli relvatoru nurga α võrra suunatud üles, siis nüüd on relvatoru sama nurga jagu suunatud alla (vt joonis), seega jäävad kuuli horisontaal- ja vertikaalsuunalised kiirused oma arvväärtuselt samaks.

Kuuli märklaua tabamise koha leiame kuuli vertikaalsuunalisest liikumisvõrrandist arvestades, et kuuli lastakse allapoole:

$$h = v_y t + \frac{gt^2}{2}.$$

Asendame liikumisvõrrandisse kuuli lennuaja t ja vertikaalsuunalise kiiruse v_y horisontaalsuunalise kiiruse v_x kaudu vastavalt $t = s/v_x$ ja

$v_y = gs/2v_x$. (*Arusaamine, kuidas vintrauda keeratakse ja et kiiruste arvväärtused jäävad samaks* [**2 p.**]). Saame:

$$\begin{aligned}
h &= v_y \frac{s}{v_x} + \frac{gs^2}{2v_x^2},\\
h &= \frac{gs}{2v_x}\frac{s}{v_x} + \frac{g}{2}\left(\frac{s}{v_x}\right)^2,\\
h &= \frac{gs^2}{v_x^2},\\
h &= \frac{gs^2}{v_0^2\cos^2\alpha}.
\end{aligned}$$

(*Vertikaalsuunalise liikumise liikumisvõrrandi kirjapanemine* [**1 p.**] *ja tulemuseni jõudmine* [**2 p.**].)

Kuna nurk α on meil teada, saame arvutada koha, kus kuul märklauda tabab.

Võib aga kasutada trigonomeetria seoseid (*hindamisel alljärgnevate teisenduste mitte tegemist palun mitte karistada, sest need on lisatud eelkõige ülesande autori stiililistel kaalutlustel*). Saame:

$$\begin{aligned}
h &= \frac{gs^2}{v_0^2\cos^2\alpha}\\
&= \frac{gs^2}{v_0^2}\frac{2}{1+\cos 2\alpha}\\
&= \frac{gs^2}{v_0^2}\frac{2}{1+\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}}\\
&= \frac{gs^2}{v_0^2}\frac{2}{1+\sqrt{1-\left(\frac{gs}{v_0^2}\right)^2}}\\
&= \frac{2gs^2}{v_0^2+\sqrt{v_0^4-(gs)^2}}.
\end{aligned}$$

Rehkendus annab tulemuseks:

$$h = \frac{2\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot(30\,\mathrm{m})^2}{(320\,\mathrm{m/s})^2+\sqrt{(320\,\mathrm{m/s})^4-(9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 30\,\mathrm{m})^2}} \approx 8{,}6\,\mathrm{cm}.$$

(*Arvuline lõpptulemus* [**1 p.**].)

Märkus: kui nurka α ei ole välja arvutatud, vaid on põhjendatud, miks nurk on väga väike ja võetud $\alpha = 0$, siis samuti anda maksimumpunktid. Põhjenduseks paneme tähele, et märgini jõutakse ligikaudu ajaga 0,1 s. Selle aja jooksul muutub vertikaalne kiirus ligikaudu $gt \approx 1\,\mathrm{m/s}$, mis on väike võrreldes algkiirusega 320 m/s. Seega muutub lennutrajektoori jooksul nurk väga vähe, umbes $\frac{1}{320}$rad $\approx 0{,}2°$. Leides nii väikesest nurgast koosinuse ruudu (täpsemalt tuleks võtta pool pööratud nurgast), siis see erineb ühest alles pärast viiendat komakohta ja võime seega võtta $\cos^2(\alpha) = 1$ ning saame samamoodi

$$h = \frac{gs^2}{v_0^2\cos^2(\alpha)} = \frac{gs^2}{v_0^2} = \frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot(30\,\mathrm{m})^2}{(320\,\mathrm{m/s})^2} \approx 8{,}6\,\mathrm{cm}.$$

7. (*VALGUSTID*) (*10 p.*) Kirjeldatud eeldustel luminestsentstoru (ja nendest moodustatud rivi) võib vaadelda lõpmata pika joonvalgusallikana, mille valgusvoog jaotub ühtlaselt silinderpinnale, mille pindala on võrdeline silindri raadiusega. Kuna kogu energia jaguneb silindri pinna peale, siis valgustatus on pöördvõrdeline kaugusega, $L \propto 1/r$. Et kaugusel $r = 0{,}15\,\mathrm{m}$ oleks valgustatus $L = 8400\,\mathrm{lx}$, peab valgustatuse valem olema $L = 8400\,\mathrm{lx} \times \frac{0{,}15\,\mathrm{m}}{r}$. Järelikult luminestsentslampide abil saadakse valgustatuseks töölaual

$$8400\,\mathrm{lx} \times \frac{0{,}15\,\mathrm{m}}{1{,}8\,\mathrm{m}} \approx 700\,\mathrm{lx}.$$

Seevastu LED-lamp on pigem punktvalgusallikas, mille valgusvoog jaotub sfääri pinnale, mille pindala on ruutsõltuvuses sfääri raadiusest. Seega $L \propto 1/r^2$ ja et kaugusel $r = 0{,}3\,\mathrm{m}$ oleks valgustatus $L = 1500\,\mathrm{lx}$, peab kehtima $L = 1500\,\mathrm{lx} \times \left(\frac{0{,}3\,\mathrm{m}}{r}\right)^2$. Töölaual kaugusel $r = 0{,}4\,\mathrm{m}$ lambist on valgustatus

$$2600\,\mathrm{lx} \times \left(\frac{0{,}3\,\mathrm{m}}{0{,}4\,\mathrm{m}}\right)^2 \approx 1500\,\mathrm{lx}.$$

Hindamisjuhend:

Luminestsentstoru kui joonvalgusallikaga tekitatud valgustatus kahaneb

pöördvõrdeliselt kaugusega: [**3 p.**].
Vastav avaldis valgustatuse leidmiseks: [**1,5 p.**].
Arvuliselt õige vastus koos mõõtühikuga: [**0,5 p.**].

LED-lambi kui punktvalgusallikaga tekitatud valgustatus kahaneb pöördvõrdeliselt kauguse ruuduga: [**3 p.**].
Vastav avaldis valgustatuse leidmiseks: [**1,5 p.**].
Arvuliselt õige vastus koos mõõtühikuga: [**0,5 p.**].

Kummagi osa puhul, kui on antud lihtsalt valgustatuse avaldis ilma põhjenduseta, siis [**-1 p.**] (st kokku [**4 p.**]).

8. (*VEEREV PALL*) (*10 p.*) Olgu x-suunaline kiirus pallil v_{x1} ning klotsil vastassuunas v_{x2}. Kuna hõõrdejõud pinnaga puudub, siis süsteemile horisontaalseid jõude ei mõju ja kehtib horisontaalse impulsi jäävuse seadus $mv_{x1} = Mv_{x2}$ [**2 p.**], kust $\frac{v_{x1}}{v_{x2}} = \frac{M}{m}$. Kuna see peab kehtima igal ajahetkel, siis järelikult kehtib ka $\frac{s_{x1}}{s_{x2}} = \frac{M}{m}$ [**2 p.**], kus s_{x1} ja s_{x2} on vastavalt palli ja aluse horisontaalsuunas läbitud vahemaad. Kui pall on jõudnud teise otsa, siis palli nihe klotsi suhtes on $2(R-r)$ (vahemaa palli keskmest punktis A palli keskmeni punktis B), seega $s_{x1}+s_{x2} = 2(R-r)$ [**3 p.**]. Avaldades $s_{x1} = s_{x2}\frac{M}{m}$ ja asendades eelmisesse võrrandisse, saame

$$s_{x2} = 2(R-r)\frac{m}{M+m}. \qquad [\mathbf{3\ p.}]$$

9. (*U-TORU*) (*12 p.*) Pärast õli kallamist torusse langeb vee tase Δh võrra selles torus, kuhu kallati õli, ning teises torus veetase tõuseb Δh võrra [**1 p.**]. Õli ja vee piirpinna kõrgusel on rõhk mõlemas U-toru harus sama [**1 p.**]. Õliga täidetud harus avaldab õli vee ja õli piirpinnale rõhku

$$p_1 = \rho_{õ} gl + p_0. \quad [\mathbf{2\ p.}]$$

Teises (suletud) U-toru harus tekitab kokkusurutud õhk rõhu $p_{õhk}$. Õhu kokkusurumist võime vaadelda isotermilise protsessina, kus $pV = const$ [**1 p.**]. Seega

$$p_0 \cdot Sh = p_{õhk} \cdot S(h-\Delta h) \quad \Rightarrow \quad p_{õhk} = \frac{p_0 h}{h-\Delta h}. \quad [\mathbf{2\ p.}]$$

Vee ja õli nivoo kõrgusel avaldavad teises harus vesi ja õhk rõhku

$$p_2 = \rho_v g(2\Delta h) + p_{\text{õhk}}. \quad [\mathbf{2\ p.}]$$

Rõhud p_1 ja p_2 on võrdsed ning $\Delta h = l - h$, seega saame kirja panna seose

$$\rho_{\text{õ}} gl + p_0 = \rho_v g2(l-h) + \frac{p_0 h}{h-(l-h)}. \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

Avaldades viimasest seosest õli tiheduse $\rho_{\text{õ}}$, saame

$$\rho_{\text{õ}} = \frac{l-h}{l}\left(2\rho_v + \frac{p_0}{g(2h-l)}\right). \quad [\mathbf{2\ p.}]$$

10. (*VEESOOJENDI*) (*12 p.*) Alguses on lisanduva vee temperatuur võrdne soojendis oleva vee temperatuuriga ja vett välja ei voola. Seega muutub vee temperatuur ainult soojendilt saadava soojuse tõttu [**2 p.**]: $\Delta Q = cm_0\Delta T = P\Delta t$ [**2 p.**]. Kui ajahetk Δt on piisavalt väike, siis saame tõusu $\Delta T/\Delta t \approx 0{,}45\,\frac{^\circ\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$, mis tuleb graafikult mõõta ajahetkel $t = 0$ [**1 p.**]. Tõusu saab leida tõmmates graafikul puutuja ajahetkel $t = 0$, mis läbib ligikaudu punkti $T = 24{,}5\,^\circ\mathrm{C}$ ja $t = 10\,\mathrm{s}$. Kui mõõdetud tõus ei erine õigest rohkem kui paarikümne protsendi võrra, anda [**1 p.**]. Massiks saame:

$$m_0 = \frac{P}{c\frac{\Delta T}{\Delta t}} \approx \frac{2000\,\mathrm{W}}{4200\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\,^\circ\mathrm{C}} \times 0{,}45\,\frac{^\circ\mathrm{C}}{\mathrm{s}}} \approx 1{,}1\,\mathrm{kg}. \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

Stabiilne temperatuur saavutatakse siis, kui ajaühikus väljavoolava vee soojendamiseks kulunud energia on võrdne soojendi võimsusega [**2 p.**]. Sellest saame seose $P = \mu c(T - T_0)$ [**1 p.**], kust võttes stabiilseks temperatuuriks $T = 36\,^\circ\mathrm{C}$ [**1 p.**], saame voolukiiruseks:

$$\mu = \frac{P}{c(T-T_0)} \approx \frac{2000\,\mathrm{W}}{4200\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\,^\circ\mathrm{C}} \times 16\,^\circ\mathrm{C}} \approx 0{,}03\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} = 30\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{s}}. \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

E1. (*KUMMINIIT*)(*10 p.*) Seome kumminiidi koormise külge ning sõrmedega kumminiiti erinevatest kohtadest hoides mõõdame erinevatele kumminiidi algpikkustele l_0 vastavad väljavenitatud kumminiidi pikkused l. Vastavalt Hooke'i seadusele $mg = k(l - l_0)$ ning arvestades, et $k = \alpha/l$, saame avaldada $\alpha = mgl/(l - l_0)$. Viime katse läbi vähemalt viie erineva algpikkuse jaoks, mis katavad ühtlaselt kogu kasutada oleva niidi pikkuse vahemiku ning kanname tabelisse mõõtmistulemused koos nende põhjal arvutatud $l/(l - l_0)$ väärtustega:

l_0 [mm]	l [mm]	$l/(l-l_0)$
30	56	2,15
40	72	2,25
50	89	2,28
60	105	2,33
70	122	2,35
80	141	2,31
90	158	2,32
100	176	2,32

Leiame katsepunktide keskväärtuse $\langle l/(l - l_0)\rangle = 2{,}3$. Arvestades koormise massiga $m = 100\,\mathrm{g}$, saame avaldada kordaja α väärtuse $\alpha = 2{,}3\,\mathrm{N}$.

Hindamisjuhend:
Idee hoida sõrmedega niiti kinni fikseeritud kohast ja mõõta algpikkust venimata olekus ning vastavat lõpp-pikkust koormise riputamisel: [**2 p.**].
Arvutuskäik α avaldamiseks l_0 ja l kaudu: [**2 p.**].
Katsetulemused tabelina (või vähemasti selgelt esitatuna) ning igale katsepunktile vastava $l/(l - l_0)$ või α väljaarvutamine: [**2 p.**].
Erinevate algpikkustega katsepunkte vähemalt 5: [**2 p.**]; katsepunkte 3 või 4: [**1 p.**]; katsepunkte 1 või 2: [**0 p.**].
Õige dimensiooniga vastus täpsusega kuni 10%: [**2 p.**]; täpsusega 10-20%: [**1 p.**].

E2. (*NIIT*)(*12 p.*) Seome niidi ühte otsa n klambrit (klambritest on mugav teha ahel) ja teise otsa m ning viskame niidi üle silindri (nii et niidi siht pöördub nurga π võrra). Alustuseks $n = 1$ ja leiame sellise vähima m-i väärtuse m_1, mille puhul niit hakkab libisema raskema otsa poole. Teame nüüd, et hõõrdetegur rahuldab võrratusi

$$m_1 - 1 < e^{\mu\pi} < m_1,$$

millest $\frac{1}{\pi}\ln(m_1-1) < \mu < \frac{1}{\pi}\ln(m_1)$. Võtame nüüd $n=2$ ning analoogselt leiame m_2 väärtuse; kui eelmine osa oli õigesti tehtud, siis on meil kaks võimalust: $m_2 = 2m_1$ või $m_2 = 2m_1 - 1$. Nüüd saame võrratuseks

$$\frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{m_2-1}{2}\right) < \mu < \frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{m_2}{2}\right).$$

Sõltuvalt hõõrdeteguri väärtusest võib olla võimalik katse läbi viia ka $n=3$ ja $n=4$ juures; üldjuhul $\frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{m_n-1}{n}\right) < \mu < \frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{m_n}{n}\right)$. Selle põhjal saame vastuseks anda

$$\mu \approx \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{m_n(m_n-1)}{n^2}\right).$$

Samuti, kui hõõrdetegur on piisavalt väike, saab teha niidiga poole keeru asemel poolteist keerdu (pöördenurk 3π). Olgu sellisel juhul niidi libisemise ajal ühes otsas 1 klamber ja teises M klambrit; siis $\frac{1}{3\pi}\ln(M-1) < \mu < \frac{1}{3\pi}\ln M$ ning

$$\mu \approx \frac{1}{6\pi}\ln[(M-1)M].$$

Libeda silindri ja niidi puhul võivad tulla näiteks järgmised tulemused: $m_1 = 3$, $m_2 = 5$, $m_3 = 7$ ja $m_4 = 9$. Kõige täpsema tulemuse annab $n=4$, $\mu \approx \ln(4{,}5)/(2\pi) \approx 0{,}24$. Kui viia katse läbi poolteise keeru juures, siis saame $M = 11$, mis annab $\mu \approx \ln(110)/(6\pi) \approx 0{,}25$, mis on natuke täpsem tulemus (sest antud juhul $M > m_4$).

Hindamisjuhend:
Katse idee: [**3 p.**].

Mõõtmiste eest alljärgnevalt:
leitud katseliselt ainult m_1: [**2 p.**];
leitud katseliselt m_2, kuid mitte m_n, kus $n > 2$ (m_1 leidmine siinjuures punkte ei lisa, sest täpsust ei suurenda): [**4 p.**];
leitud katseliselt m_3, kuid mitte m_n, kus $n > 3$: [**5 p.**];

leitud katseliselt m_4: [**6 p.**] (kui hõõrdetegur on nii suur, et $n = 4$ puhul ei jagu klambreid, siis tuleb anda $n = 3$ eest [**5 p.**] asemel [**6 p.**]);
katse läbi viidud ka poolteise keeru juures: täiendavalt [**1 p.**].
Kui hõõrdetegur on nii suur, et klambreid ei jätku katse läbiviimiseks poolteise keeru juures, siis kantakse see punkt eelmistele mõõtmistele, st $n = 1$: [**3 p.**]; $n = 2$: [**5 p.**]; $n = 3$: [**7 p.**].
Kui katse on läbi viidud ainult poolteise keeru puhul, kuid ei ole mõõdetud poole keeru juures, siis antakse mõõtmiste eest kokku [**6 p.**].

Tulemuste täpsuse eest — vastus arvutatud mõõtmistulemuste põhjal vigadeta ja tulemuse erinevus tegelikust väärtusest
ei ole suurem kui 10%: [**2 p.**];
on 15% ja 10% vahel: [**1,5 p.**];
on 20% ja 15% vahel: [**1 p.**];
on 30% ja 20% vahel: [**0,5 p.**].

Märkus: põhimõtteliselt on vale katset läbi viia nii, et riputada niidi otstesse võrdsed arvud klambreid, asetada see silindrile ning kallutada silindri telge leides nurga, mille juures niit hakkab libisema. Esiteks, sellisel juhul ei kehti seos $\mu = \tan\alpha$, teiseks, nurga mõõtmiseks pole katsevahendeid. Selline lahendus annab [**0 p.**].