Eesti koolinoorte 53. füüsikaolümpiaad

21. jaanuar 2006. a. Piirkondlik voor.

Gümnaasiumi ülesannete lahendused

Eessõna

Käesoleval lahendustelehel on toodud iga ülesande üks õige lahenduskäik (mõnel juhul ka enam). Kõik alternatiivsed õiged lahenduskäigud tuleb hinnata samuti maksimumhindega. Iga alternatiivse lahenduskäigu jaoks tuleb kontrollijatel koostada hindamisskeem juhindudes juuresoleva hindamisskeemi punktijagamisproportsioonist. Soovituslikud maha-arvamise punktid: numbriline arvutusviga - 0,5 p.; viga teisendustes - 0,5 p. (märgi jms väiksem viga) või 1 p. (viga, mis viib dimensioonide konfliktini), maha arvata ainult üks kord, st edasikanduvat viga mitte karistada; kui vastus tuleb füüsikaliselt absurdne, siis võib täiendavalt karistada 0,5 punktiga; üksik viga lähtevalemis: 0,5 p. (kui märgiviga) kuni 50% (sisuline viga).

1. ülesanne (*AUTOD MAANTEEL*)

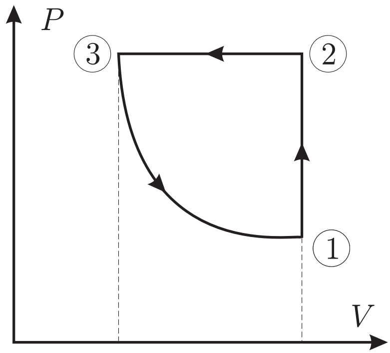
Vaatleme jalgatturi liikumist talle vastu sõitvate autode suhtes. Tema kiirus on siis $v = v_1 + v_2 = 120$ km/h [2 p.]. Siis kulub tal $s = 180$ km läbimiseks $t = s/v = 90$ minutit [2 p.], selle ajaga kohtab ta

$$n = n_0 \frac{t}{t_0} = 360 \text{ autot.} \quad [2 \text{ p.}]$$

2. ülesanne (*RING*)

Antud graafik teisendada graafikuks telgedega P ja V, kus iga tsükli osa töö on arvuliselt võrdne antud graafiku osa alla jääva pindalaga. Ideaalse gaasi töö protsessi osal $1 \to 2$: $A_{1\to2} = 0$, protsessi osal $2 \to 3$: $A_{2\to3} < 0$ ning protsessi osal $3 \to 1$: $A_{3\to1} > 0$, kuid $|A_{2\to3}| > |A_{3\to1}|$, seega $A_{1\to2\to3} < 0$.

Punktid: idee minna üle teljestikku V–P [2 p.], idee kasutada selleks ideaalse gaasi valemit [1 p.], graafik õige kujuga [2 p.], tsükkel V–P teljestikus õiget pidi (nooled õiget pidi) [1 p.], graafiku põhjal lõpptulemuse saamine [2 p.].



3. ülesanne (*SONAR*)

Esimene lahendus:

Sonarist saadetakse välja heli lainepikkusega $\lambda_1 = v_h/f_1$ [1 p.]. Helilaine läheneb laevale kiirusega $v_h - v$ [1 p.], seega jõuab laevani helisignaal sagedusega

$$f_L = \frac{v_h - v}{\lambda_1} = f_1 \frac{v_h - v}{v_h}. \quad [1{,}5 \text{ p.}]$$

Laevalt peegeldub helisignaal tagasi kiirusega $v_h + v$ [1,5 p.], järelikult selle signaali lainepikkus on $\lambda_2 = (v_h + v)/f_L$. Sonari vastuvõtjasse rannikul jõuab signaal sagedusega

$$f_2 = \frac{v_h}{\lambda_2} = f_L \frac{v_h}{v_h + v} = f_1 \frac{v_h - v}{v_h + v}. \quad [2 \text{ p.}]$$

Avaldame viimasest võrdusest v:

$$v = v_h \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}. \quad [1 \text{ p.}]$$

Teine lahendus:

Kasutame Doppleri valemit

$$f_2 = f_1 \frac{1 + v_2/c}{1 + v_1/c}, \quad [3 \text{ p.}]$$

kus saatja ja vastuvõtja lähenevad üksteisele kiirustega vastavalt v_1 ja v_2 ning c on heli kiirus keskkonnas.

Kui signaal jõuab rannikult laevani, siis antud olukorras on saatja kiirus $v_1 = 0$ ja vastuvõtja kiirus $v_2 = -v$, sest vastuvõtja (laev) kaugeneb saatjast. Doppleri valem saab sel juhul kuju

$$f_L = f_1 \frac{v_h - v}{v_h}, \quad [2 \text{ p.}]$$

kus f_l on laevani jõudva signaali sagedus.

Olukorras, kus signaal läheb laevalt tagasi rannikule, on saatja kiirus $v_1 = -v$, sest saatja (laev) kaugeneb vastuvõtjast (rannikult). Vastuvõtja kiirus on aga $v_2 = 0$. Vastavalt Doppleri valemile jõuab sonari vastuvõtjasse rannikul signaal sagedusega

$$f_2 = f_L \frac{v_h}{v_h + v} = f_1 \frac{v_h - v}{v_h + v}. \quad [2 \text{ p.}]$$

Avaldame viimasest võrdusest v:

$$v = v_h \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}. \quad [1 \text{ p.}]$$

Märkus: kuivõrd iga realistliku laeva kiiruse puhul $v \ll c$, siis on lubatud kasutada ligikaudset Doppleri valemit

$$f = f_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Sama lähendust saab kasutada ka esimese lahenduse puhul.

4. ülesanne (*KALDPIND*)

Esimeseks põrkeks kogub pall kiiruse $v = \sqrt{2gh}$ [1 p.] Valin x-telje pikki kaldpinda ja y-telje risti kaldpinnaga[3 p.]. Seega tuleb palli kiirus ja raskuskiirendus jagada komponentideks. x-telje suunas on liikumisvõrrand

$$x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad [1 \text{ p.}]$$

kus algkiirus on $v_{0x} = \sin\alpha\sqrt{2gh}$ [0,5 p.] ja kiirendus $a_x = g\sin\alpha$ [0,5 p.] y-telje suunalisest liikumisest saab leida lennuaja, mis kahe põrke vahel on kiiruse võrrandist

$$v_{0y} = a_y \frac{t_{01}}{2} \quad \Rightarrow \quad t_{01} = \frac{2\sqrt{2gh}\cos\alpha}{g\cos\alpha}. \quad [2 \text{ p.}]$$

Kogu lennuaeg esimesest põrkest viiendani on $4t_{01}$. Asendades lennuaja x-telje suunalisse liikumisvõrrandisse ja tehes mõned teisendused saame vastuseks

$$x = 80h\sin\alpha. \quad [2 \text{ p.}]$$

5. ülesanne (*GAASITERMOMEETER*)

Tähistame mõõteampulli ruumala V ning manomeetri ruumala V_m. Kui toatemperatuuril T_0 täideti seade n mooli gaasiga, siis ideaalse gaasi olekuvõrrandi põhjal

$$\frac{p_0 V}{T_0} + \frac{p_0 V_\mathrm{m}}{T_0} = nR. \quad [3 \text{ p.}]$$

Kuna manomeeter ja mõõteampull on kapillaari kaudu ühenduses, siis gaasi rõhud nendes on ühesugused ka siis, kui nende temperatuurid on erinevad. Kui mõõteampull on temperatuuril T, siis (gaasi koguhulk jääb samaks)

$$\frac{pV}{T} + \frac{pV_\mathrm{m}}{T_0} = nR. \quad [3 \text{ p.}]$$

Elimineerides n ja asendades $V_\mathrm{m}/V = \alpha$, saame

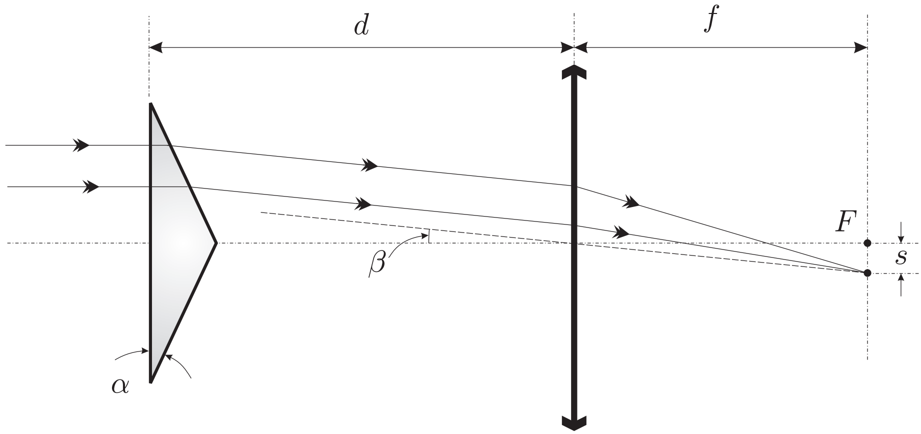
$$T = \frac{pT_0}{p_0 + (p_0 - p)\alpha} \approx 20{,}5\ \mathrm{K}. \quad [4\ \mathrm{p.}]$$

Märkus: Õigeks tuleb lugeda ka lahendus, kus on arvestatud, et $V \ll V_\mathrm{m}$ ($\alpha \gg 1$) ja piirdutud ligikaudse tulemusega

$$T = \frac{pT_0}{(p_0 - p)\alpha} \approx 22{,}8\ \mathrm{K}.$$

6. ülesanne (*BIPRISMA*)

Valguskiir siseneb prismasse murdumata, sest on normaali-sihiline. Küll aga toimub murdumine prismast väljudes. Kuna terve tahu ulatuses on langemisnurk sama, tekitab üks tahk paralleelse kiirtekimbu (vt. joon. 1). Kuna meil on kaks murdvat tahku, on esialgne kiirtekimp pärast prisma läbimist jagunenud kaheks. [1 p.]



Joonis 1: Ülesanne 6

On lihtne märgata, et langemisnurk, millega kiired langevad murdvale tahule, on α. [1 p.]

Vastavalt murdumisseadusele saame murdumisnurga γ jaoks seose:

$$\sin\gamma = n\sin\alpha. \quad [2 \text{ p.}]$$

Väikeste nurkade jaoks lihtsustub see avaldis: $\gamma = n\alpha$. Kiir kaldus seega oma esialgsest sihist kõrvale nurga

$$\beta = \gamma - \alpha = (n-1)\,\alpha \quad [1 \text{ p.}]$$

võrra.

Teame, et paralleelne kiirtekimp koondub kumerläätse fokaaltasandis. [1 p.]

Seega tekib fokaaltasandis asuvale ekraanile sümmeetriliselt kaks valgustäppi, teine teisele poole optilist peatelge. [2 p.]

Arvutame ka nende kaugused peateljest. Selleks kasutame läbi läätse keskpunkti tõmmatud kiirt, mis asetseb peateljega nurga β all. Täisnurksest kolmnurgast saame valguspunkti kauguse peateljest:

$$s = f\tan\beta \approx f\beta = (n-1)\alpha f. \quad [1 \text{ p.}]$$

Ilmselt ei sõltu ekraanil tekkiv pilt kaugusest d. [1 p.]

Et olla päris täpne, tuleks siiski märkida, et d kasvades piisavalt suureks hakkavad täpid muutuma tuhmimaks kuni lõpuks kaovad üldse, sest siis kiired enam läätse ei läbi.

Märkus hindajale: Täpsete trigonomeetriliste avaldistega lahendus väärib sama palju punkte kui lihtsustusi kasutav lahendus, sellisel juhul oleks lõppvastus:

$$s = f\tan(\arcsin(n\sin\alpha) - \alpha).$$

7. ülesanne (*KONDENSAATORID*)

a) Vooluallikas laeb mõlemad kondensaatorid elektromotoorjõuga võrdse pingeni, seega on $q_{a1} = C_1 E$ [1 p.] ja $q_{a2} = C_2 E$. [1 p.]

b) Leiame, kui suure pingeni kondensaatoreid laaduvad. Voolutugevus ahelas on

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3 + r}. \quad [1 \text{ p.}]$$

Kondensaatoril C_1 on leang $q_{b1} = C_1 I(R_1 + R_2)$ [1 p.] ja kondensaatoril C_2 on laeng $q_{b2} = C_2 I R_2$. [1 p.]

c) Kehtib laengu jäävus [2 p.], paralleelses ühenduses on pinged kondensaatoritel võrdsed. Summaarne laeng $q = q_{b1} + q_{b2}$ [0,5 p.] ning mahtuvus $C = C_1 + C_2$. [0,5 p.] Pinge kondensaatoril on $U = q/C$. [1 p.] Laengud kondensaatoritel on $q_{c1} = C_1 U$ [0,5 p.] ja $q_{c2} = C_2 U$. [0,5 p.]

8. ülesanne (*TOLM*)

Avaldame elektrivälja tugevuse kondensaatori plaatide vahel, plaatide pindala S, plaatide vahelise kauguse d ja kondensaatori mahtuvuse C ning pingega U kondensaatori plaatide vahel. Seega:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \quad [1 \text{ p.}] \quad \text{ja} \quad C = \frac{q}{U}, \quad [1 \text{ p.}]$$

kus ε on õhu dielektriline läbitavus.

$$\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} = \frac{q}{U} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}. \quad [1 \text{ p.}]$$

Arvestades, et pindtihedus $\sigma = q/S$ [0,5 p.], saame

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}. \quad [0{,}5 \text{ p.}]$$

Tolmukübemele mõjub raskusjõud mg [0,5 p.] ja elektrostaatiline jõud Eq [0,5 p.]. Tassakaalu korral $mg = Eq$ [1 p.]. Tolmukübeme laeng on

$$q = \frac{mg}{E} = mg\,\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma} \approx 0{,}33 \cdot 10^{-17}\ \text{C}. \quad [1 \text{ p.}]$$

Kui polaarsust muuta, siis mõjub tolmukübemele jõud

$$F = mg + Eq = 2mg. \quad [2 \text{ p.}]$$

Kiirendus, millega tolmukübe hakkab langema on $a = 2g$ [1 p.].

Märkus: Õigeks tuleb lugeda ka lahendus, kus valemit

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

kasutatakse vahetult ilma selle tuletamist. Sel juhul anda valemi eest [4 p.] ja edasi ülaltoodud hindamisskeemi järgi.

9. ülesanne (*VEEJUGA*)

Leidmaks purgi täitumise aega, on meil vaja teada veevoolu kiirust mingil kõrgusel. Olgu see kiirus kraanitoru otsa juures v_0 ning kaugusel h (seal, kus raadius on r_1) v_1. Esimese vajaliku seoseni võib jõuda vähemalt kolmel eri viisil: [kõik 2 p.]

1. Vool kiireneb ühtlaselt, mistõttu:

$$v_1^2 - v_0^2 = 2gh.$$

2. Kasutame energia jäävust, kirjutades väikesele veekogusele massiga Δm energiate muudud:

$$\frac{\Delta m v_1^2}{2} - \frac{\Delta m v_0^2}{2} = \Delta mgh.$$

3. Rakendame Bernoulli seadust:

$$p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} + \rho gh = p_0 + \frac{\rho v_1^2}{2},$$

kus p_0 on välisrõhk ja ρ vee tihedus.

Ajaga Δt läbib iga veejoa ristlõiget sama kogus vett, sest seda ei kao kuhugi ega tule ka juurde:

$$\pi r_0^2 v_0 \Delta t = \pi r_1^2 v_1 \Delta t, \quad \text{[4 p.]; ilma valemita [2 p.]}$$

$$r_0^2 v_0 = r_1^2 v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_0 \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2,$$

mille asetame avaldisse $v_1^2 - v_0^2 = 2gh$:

$$\left[v_0 \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2\right]^2 - v_0^2 = 2gh \quad \Rightarrow \quad v_0^2 \left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^4 - 1\right] = 2gh \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2gh}{(r_0/r_1)^4 - 1}}. \quad \text{[2 p.]}$$

Ajaga t voolab purki veekogus, mille ruumala:

$$V = \pi r_0^2 v_0 t, \quad \text{[2 p.]}$$

avaldame viimasest võrrandist aja t:

$$t = \frac{V}{\pi r_0^2 v_0} = \frac{V}{\pi r_0^2} \sqrt{\frac{(r_0/r_1)^4 - 1}{2gh}} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{V}{\pi \sqrt{2gh}} \sqrt{\frac{1}{r_1^4} - \frac{1}{r_0^4}}. \quad \text{[1 p.]}$$

Arvuliselt $t \approx 21$ s. [1 p.]

Märkus: Arvutusi saanuks läbi viia ka teisiti, nt. lähtudes võrrandisüsteemist:

$$\begin{cases} \pi r_0^2 v_0 t = V \\ \pi r_1^2 v_1 t = V \\ v_1^2 - v_0^2 = 2gh \end{cases}$$

Siis annab süsteemi kirjapanek [8 p.] (iga võrrand eraldi [2 p.], esimese ja teise kokkupanek veel [2 p.], algebraline lahendamine [3 p.] ja t arvuline väljaarvutamine. [1 p.]

10. ülesanne (*VAI*)

Olgu raskuse kiirus enne lööki vaia pihta v ja raskuse ning vaia kiirus vahetult pärast lööki v'. Löögi jooksul säilib impulss (aga mitte energia) [1 p.]

$$p = mv = (m + M)v'. \quad [1\text{ p.}]$$

Kiiruse v või impulsi p saame energia jäävuse seadusest, nt kujul

$$\frac{p^2}{2m} = mgH. \quad [2\text{ p.}]$$

Niisiis on peale lööki süsteem vai+raskus omandanud kiiruse v'. Hõõrdejõudude toimel peatuvad need teatava teepikkuse x jooksul, kusjuures tingimuste kohaselt löökide arv $N \gg 1$ ning seega $x \ll L$. Hõõrdejõudude töö on seejures võrdne energia muuduga. Viimase tähelepaneku eest, olgu sees siis üksiku nihke jaoks või terve vaia sisselöömise jaoks valemina $A_h = E$ (vt allpool). [2 p.]

Eelpooltoodu võiks kirja panna kujul

$$(F_0 + kl)\,x = (M + m)\,gx + \frac{p^2}{2(m + M)}\,,$$

kuid lõppvastuse leidmise seisukohast on meil lihtsam võrrutada summaarne hõõrdejõudude töö [mis on leitav nt graafiku $F(l)$ aluse pindalana],

$$A_h = F_0 L + \frac{kL^2}{2}. \quad [2\text{ p.}]$$

summaarse dissipeeruva energiaga

$$E = \frac{Np^2}{2(m + M)} + (M + m)\,gL. \quad [2\text{ p.}]$$

Viimases valemis juhime tähelepanu liikmele $(M + m)\,gL$. Puhtformaalselt on võimalik konstrueerida kselliseid parameetrite vahekordi, kus see liige on oluline (mitte-väike), nt kui samaaegselt

$$F_0 - (m + M)\,g \ll F_0,\ kL \ll F_0 \text{ ja } H \ll L.$$

Ometigi, realistlikes olukordades ilmselt

$$F_0 + \frac{kL}{2} \gg (m + M)\,g,$$

st see liige on väike võrreldes hõõrdejõudude tööga ning teda võib mitte arvestada. Seetõttu on soovituslik karistada liikme $(M + m)\,gL$ puudumist minimaalselt (energia E avaldise eest 2 p asemel 1,5 punkti).

Võrdusest $A_h = E$ saame (arvestades eelpooltoodud avaldisi A_h, E ja $p^2/2m$ jaoks)

$$N = \left(F_0 + \frac{kL}{2} - Mg - mg\right)\frac{(m + M)L}{m^2 gH}. \quad [2 \text{ p.}]$$

E1. ülesanne (*LÄÄTS*)

Esimene lahendus:

Põlev lamp asetatakse kumerläätsest võimalikult kaugele, et läätsele langeva valgusvihu võiks lugeda paralleelseks (piisav vahemaa 50 cm). Mõõdetakse kumerläätse fookuskaugus. Kumerläätse ette asetatakse nõguslääts. Kui nõgusläätse ja kumerläätse fookused ühilduvad, on pärast kumerläätse valgusvihk paralleelne. Paralleelsuse määramiseks asetatakse ekraanile paberileht ja märgitakse sellele valguslaigu läbimõõt. Ekraani nihutamisel peab valguslaik ekraanil jääma sama suureks. Mõõdetakse läätsede optiliste keskpunktide kaugused l. Nõgusläätse fookuskaugus $f_n = f_k - l$.

Idee [3 p.]. Kumerläätse fookuskauguse määramine [1 p.]. Nõgusläätse õigesse kohta paigaldamine [1 p.]. Valgusvihu paralleelsuse kontroll [1 p.]. Läätsede vahekauguse mõõtmine [1 p.]. Nõgusläätse fookuskauguse arvutamine [1 p.]. Korduvkatsed [1 p.]. Veaarvutus [1 p.].

Teine lahendus:

Põlev lamp asetatakse kumerläätsest võimalikult kaugele, et läätsele langeva valgusvihu võiks lugeda paralleelseks. Mõõdetakse kumerläätse fookuskaugus. Kumerläätse taha asetatakse nõgusläätst. Kui kumerläätse ja nõgusläätse fookused ühilduvad, on pärast nõgusläätse valgusvihk paralleelne. Kontrollitakse valgusvihu paralleelsus. Mõõdetakse läätsede optiliste keskpunktide kaugused l. Nõgusläätse fookuskaugus $f_n = f_k - l$.

Idee [3 p.]. Kumerläätse fookuskauguse määramine [1 p.]. Nõgusläätse õigesse kohta paigaldamine [1 p.]. Valgusvihu paralleelsuse kontroll [1 p.]. Läätsede vahekauguse mõõtmine [1 p.]. Nõgusläätse fookuskauguse arvutamine [1 p.]. Korduvkatsed [1 p.]. Veaarvutus [1 p.].

Kolmas lahendus:

Kui valgusallikas asub piisavalt kaugel, siis võib lugeda, et läätsele langevad kiired on paralleelsed. Nõgusläätsest asetatakse valgusallika ja ekraani vahele. Nõgusläätsest eemaldatakse ekraanist. Teatud kaugusel ekraanist tekib läätse võru ümber hele rõngas. Mõõdetakse läätse läbimõõt, heleda rõnga läbimõõt ja läätse kaugus ekraanist ning sarnastest kolmnurkadest arvutatakse nõgusläätse fookuskaugus.

Sarnastest kolmnurkadest ilmneb, et $D/d = a/f$, millest $f = ad/D$. Meetod on eelnevatest ebatäpsem, sest ruumi valgustatus segab katse läbiviimist ning heleda rõnga piire ei ole võimalik kuigi täpselt fikseerida, seepärast on antud lahenduse eest maksimaalselt võimalik saada [6 p.].

Neljas lahendus:

Põlev lamp asetatakse kumerläätse fookusesse. Pärast läätse on valgusvihk paralleelne. Nõgusläätsest asetatakse heledasse paralleelsesse valgusvihku. Nõgusläätse taha paigutatakse ekraan. Nõgusläätsest eemaldatakse ekraanist. Teatud kaugusel ekraanist tekib läätse võru ümber hele rõngas. Mõõdetakse läätse läbimõõt, heleda rõnga läbimõõt ja läätse kaugus ekraanist ning sarnastest kolmnurkadest arvutatakse nõgusläätse fookuskaugus. Sarnastest kolmnurkadest ilmneb, et $D/d = a/f$, millest $f = ad/D$.

Idee [3 p.]. Valgusallika paigutamine kumerläätse fookuskaugusesse [1 p.]. Valgusvihu paralleelsuse kontroll [1 p.]. Nõgusläätse läbimõõdu mõõtmine [1 p.]. Ekraanil tekkinud valguslaigu läbimõõdu mõõtmine [1 p.]. Ekraani ja läätse vahelise kauguse mõõtmine [1 p.]. Korduvkatsed [1 p.]. Veaarvutus [1 p.].

E2. ülesanne (*TIKUTOOS*)

Tikutoosi paberil tikuga lükates mõjub sellele jõud $F = \mu mg$ [1 p.]. Teatud punktist altpoolt lükates tikutoos libiseb ning ülevalt poolt lükates kukub tikutoos ümber [1 p.].

Libisemise tingimus:

$$Fl \leq \frac{mgd}{2},$$

kus l on kõrgus, millelt lükatakse, ja d tikutoosi paksus, m mass ja g raskuskiirendus. Ehk siis jõumoment, mis pöörab tikutoosi algasendisse tagasi, on suurem kui tikutoosi ümber lükkav jõumoment [5 p.].

Kasutades suurimat kõrgust, millelt lükates tikutoos veel libiseb, ehk

$$Fl = mg\frac{d}{2} \quad [1\text{ p.}] \quad \Rightarrow \quad \mu mgl = mg\frac{d}{2} \quad [0{,}5\text{ p.}] \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{d}{2l}. \quad [0{,}5\text{ p.}]$$

Maksimaalse kõrguse määramine katseliselt, millelt tikutoos veel libiseb [3 p.], sest see ei ole sugugi nii lihtne. Korduskatsed ja mingisugunegi veahinnang, näiteks: mõõtmistulemuste aritmeetilinekeskmine [2 p.].