Eesti koolinoorte 69. füüsikaolümpiaad

9. aprill 2022. a. Vabariiklik voor.
Põhikooli *ülesannete lahendused*

Eessõna

1. (*KÜLM NAEL*) (*8 p.*) *Autor: Jaan Kalda.*
Kui saabub soojuslik tasakaal, on nii nael, vesi kui jää null kraadi juures, seega omandab nael pikkusega l soojust $Q = \pi r^2 l \rho_r \Delta t c_n$ võrra, kus $\Delta t = 20\,\mathrm{K}$. See tuleb jää sulamissoojuse arvelt, $\pi r^2 l \rho_r \Delta t c_n = 2\pi r l \delta \rho_j \lambda$. Siin me eeldasime, et jääkihi paksus δ on hulga väiksem raadiusest, eelduse kehtivust näeme, kui oleme leidnud numbrilise vastuse. Seda eeldust poleks olnud vaja hädapärast teha, ilma selleta oleksime jõudnud ruutvõrrandini. Nüüd aga saame lihtsalt avaldada $\delta = \frac{r}{2}\frac{\rho_r}{\rho_j}\frac{c_n \Delta t}{\lambda} \approx 0{,}12\,\mathrm{mm}$. See on umbes kaheksa korda väiksem raadiusest, nii et tehtud eeldus on enam-vähem õigistatud.

Täpse lahendamise korral saame soojustasakaaluvõrrandiks

$$\pi r^2 l \rho_r \Delta t c_n = \pi \delta(\delta + 2r)\rho_j c_j \lambda),$$

mis omandab kuju

$$\delta^2 + 2\delta r = 2\delta_0 r,$$

kus δ_0 on eelpool leitud ligikaudne vastus. Selle lahendamisel leiame $\delta = r - \sqrt{r^2 + 2r\delta_0} \approx 0{,}11\,\mathrm{mm}$.

2. (*HEELIUMSILINDER*) (*8 p.*) *Autor: Erkki Tempel.*
Silinder püsib paigal siis, kui silindrile mõjuv rõhumisjõud (F_p on võrdne raskusjõuga F_r

Tähistame silindri kesta massi m ning avaldame jõud

$$F_r = mg + \rho_{He}\pi\frac{d^2}{4}Hg$$

$$F_p = \Delta p S = (\rho_{H_2} g\frac{1}{3}H + \rho_o g\frac{2}{3}H)\pi\frac{d^2}{4}$$

Kuna $F_r = F_p$, siis saame avaldada silindri kesta massi m

$$m = \pi\frac{d^2}{4}H(\frac{1}{3}\rho_{H_2} + \frac{2}{3}\rho_o - \rho_{He}) \approx 6{,}1\,\mathrm{g}$$

3. (*JALGRATTUR*) (*8 p.*) *Autor: Konstantin Dukatš, Oleg Košik.*
Olgu tuule kiirus u. Siis on pärituult ratturi suhteline kiirus õhu suhtes $V_2 + u$ ning vastutuult $V_1 - u$. Kuna võimsus $P = Fv$ on mõlemal juhul sama, saame võrrandi

$$k(V_1 - u)^2 V_1 = k(V_2 + u)^2 V_2,$$

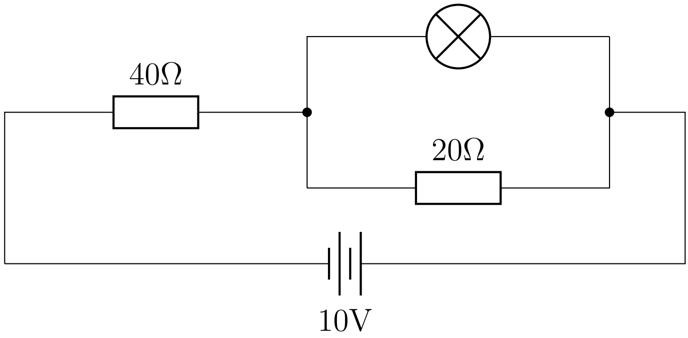
kust leiame $u = 7\,\mathrm{m/s}$.

4. (*GAASIBOILER*) (*8 p.*) *Autor: Kaarel Kivisalu.*
Selleks, et boileris vee temperatuur ei langeks peab vee soojendamise võimus võrduma vee vahetumisel vee jahtumise võimsusega: $\dot{m}L\eta = c(t_s - t_k)\rho V$. Seega

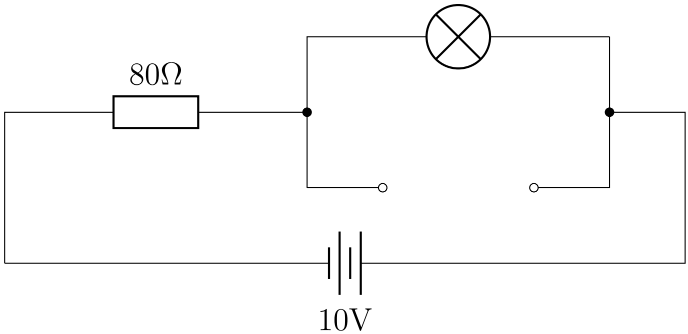
$$\dot{m} = \frac{c(t_s - t_k)\rho V}{L\eta} = 0{,}10\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{s}}. \tag{1}$$

5. (*3 LAMPI*) (*10 p.*) *Autor: Sandra Schumann.*
Selleks, et lamp põleks võimsusel $0.2W$ ja pingel $2V$, peab teda läbiv voolutugevus olema $\frac{0{,}2W}{2V} = 0{,}1A$. Saame ka leida, et järelikult peab joonisel vasakpoolses klemmidevahes olema mingisugune grupp takisteid, millel kokku on pinge $10V - 2V = 8V$. Lambi takistus põledes on $\frac{2V}{0.1A} = 20\Omega$.

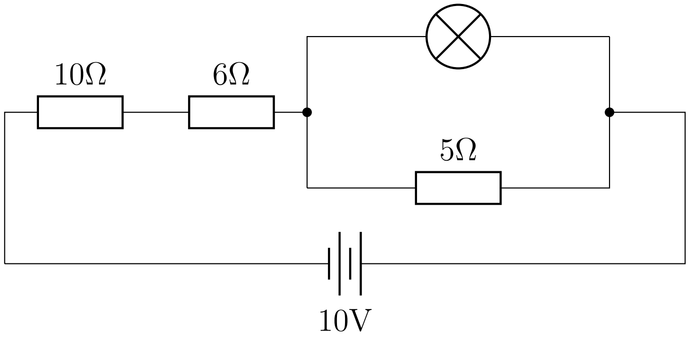
Juta saab koostada näiteks sellised kolm vooluringi:



Lamp ja temaga rööbiti olev 20Ω takisti on sama takistusega, seega läbib neid mõlemat sama voolutugevus $0.1A$. Seega läbib 40Ω takistit voolutugevus $0.1A + 0.1A = 0.2A$ ning pinge tema otstel on $40\Omega \cdot 0.2A = 8V$, mis sobib meie tingimustega.



Takisti on täpselt 4 korda suurema takistusega, kui temaga jadamisi olev lamp, neid läbib sama tugevusega vool ja seega on pinge takisti otstel neli korda suurem kui lambi otstel ehk $8V$.



Takistid 10Ω ja 6Ω pakuvad jadamisi asetatuna takistuse väärtusega 16Ω. Takisti väärtusega 5Ω on 4 korda väiksema takistusega kui lamp, seega läbib teda 4 korda suurema tugevusega vool, mis on $0.1A \cdot 4 = 0.4A$. Kokku on voolutugevus läbi 10Ω ja 6Ω takisti seega $0.5A$ ja pinge nende kahe otstel on vastavalt $0.5A \cdot 10\Omega = 5V$ ja $0.5A \cdot 6\Omega = 3V$, mis on kokku $8V$, nagu vaja.

6. (*HEINAPLOKK*) (*10 p.*) *Autor: Kaarel Hänni.*
Vaatleme esmalt keeramist ümber külje pikkusega a tahult, mille teine külg on pikkusega b, tahule, mille teine külg on pikkusega c. Selle pöörde jooksul liigub ploki masskese mööda ringjoonelist trajektoori raadiusega $\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2}$. Alguses on masskeskme kõrgus maast $\frac{c}{2}$ ja trajektoori kõrgeimas punktis on masskeskme kõrgus maast $\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2}$, seega peab Heino kulutama pöördeks vähemalt energia $mg\left(\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2} - \frac{c}{2}\right)$. See on ka piisav, sest (eeldusel, et ploki kineetiliseks energiaks minev töö on tõstmisel tühine) kulubki masskeskme sellele kõrgusele tõstmiseks energia $mg\left(\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2} - \frac{c}{2}\right)$ ning pärast trajektoori seda punkti kukub plokk juba ise järgmisele tahule.

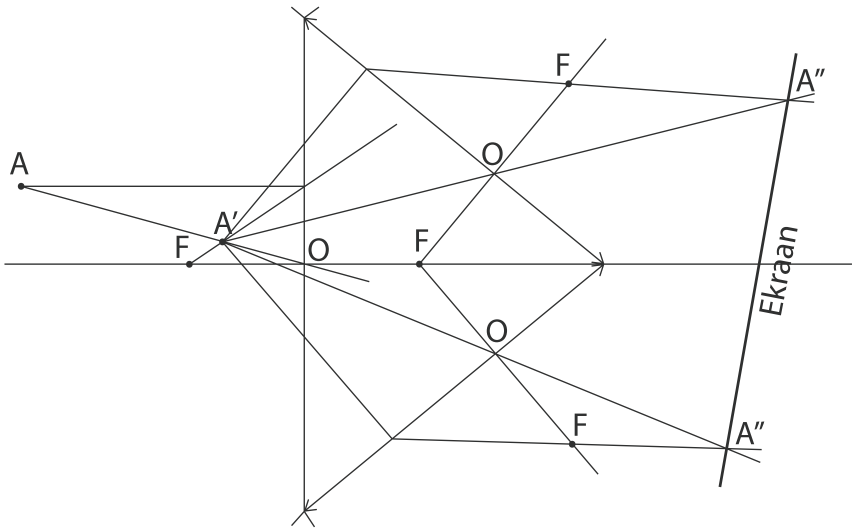
Järgmist pööret samamoodi analüüsides leiame, et selleks peab Heino tegema tööd $mg\left(\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2} - \frac{b}{2}\right)$. Kahe pöörde peale kokku kulutab Heino seega energia $mg\left(\sqrt{b^2+c^2} - \frac{b+c}{2}\right)$. Sellega liigub plokk edasi $b+c$ võrra. Sama kehtib ka järgmise kahe pöörde kohta, järgmise kahe pöörde kohta pärast neid jne. Seega kulutab Heino keskmiselt pikkusühiku kohta energia

$$\frac{mg\left(\sqrt{b^2+c^2}-\frac{b+c}{2}\right)}{b+c}=\sqrt{1-\frac{1}{1+\frac{a}{2b}+\frac{b}{2a}}}-\frac{1}{2}.$$

Teiste telgede jaoks saab teha analoogse arvutuse. Kokkuvõttes näeme, et minimaalne energiakulu vastab sellele teljele, mille jaoks $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ analoog on minimaalne. Arvud sisse asendades saame, et $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\approx 2{,}114$, $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}=2{,}5$ ja $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\approx 2.129$. Kuna neist kolmest arvust minimaalne on $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\approx 2{,}114$, peaks plokki keerama ümber telje pikkusega c.

Märkus. Natuke keskkoolimatemaatikat kasutades saab ka näidata, et üldjuhul peaks keerama ümber selle telje, mille jaoks kaks ülejäänud külge on "võimalikult võrdsed", tähenduses et nende jagatis on võimalikult lähedal 1-le. See on ka kooskõlas intuitsiooniga, et rattakujulisi asju on üldiselt lihtsam keerata. (Mida vähem sarnase pikkusega need kaks külge on, seda rohkem on "ratas lopergune".)

7. (*LÄÄTSEDE KOLMNURK*) (*10 p.*) *Autor: Erkki Tempel.*



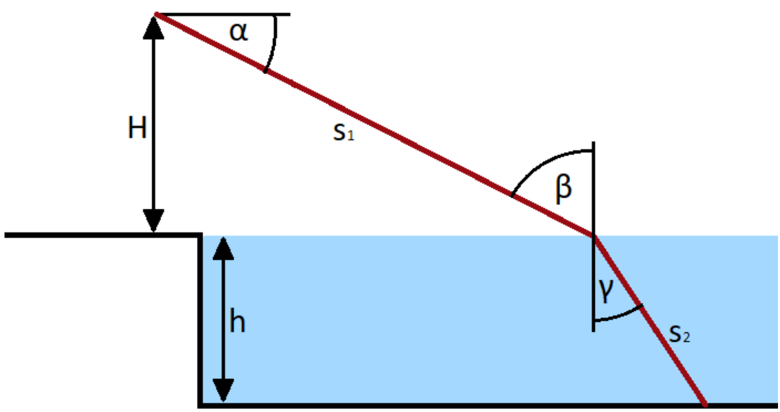
8. (*SILINDER*) (*10 p.*) *Autor: Richard Luhtaru.*
Jagame silindri kaheks poolsilindriks. Me võime vaadelda kumbagi poolsilindrit kui hästi laia juhet, mille pikkus on $\ell = \pi r$ ja ristlõikepindala on $S = \tau h$. Kummagi poolsilindri takistus on seega

$$R = \rho \frac{\ell}{S} = \frac{\rho \pi r}{\tau h}$$

Kuna kaks "juhet" on ühendatud rööbiti, siis kogutakistus A ja B vahel on

$$R_{AB} = \frac{1}{2} R = \frac{\rho \pi r}{2 \tau h}$$

9. (*LASERKAUGUSMÕÕTJA*) (*10 p.*) *Autor: Simon Selg.*



Laserkaugusmõõtja arvutab oma näidu vastavalt valemile $s = t \cdot c$, kus t tähistab aega, mis valguskiirel kulub objektini jõudmiseks. Laserkiir peab enne peegeldumist läbima õhus teepikkuse s_1 ja vees teepikkuse s_2. Vastavalt kulub aega $t_1 = \frac{s_1}{c} = \frac{H}{c \cdot sin\alpha}$ ja $t_2 = \frac{s_2}{v} = \frac{n \cdot h}{c \cdot cos\gamma}$. Lisaks teame, kuidas valgus vette jõudmisel murdub $\frac{sin\beta}{sin\gamma} = \frac{c}{v} = n$. Nüüd on võimalik avaldada basseini sügavus.

$$sin\gamma = \frac{sin\beta}{n} = \frac{cos\alpha}{n}$$

$$cos\gamma = \sqrt{1 - \frac{cos^2\alpha}{n^2}}$$

$$t_2 = \frac{h \cdot n}{c\sqrt{1 - \frac{cos^2\alpha}{n^2}}}$$

$$s = t_1 c + t_2 c = \frac{H}{sin\alpha} + \frac{h \cdot n}{\sqrt{1 - \frac{cos^2\alpha}{n^2}}}$$

$$h = \frac{(s - \frac{H}{sin\alpha})\sqrt{1 - \frac{cos^2\alpha}{n^2}}}{n} \approx 1{,}7$$

10. (*VEEUPUTUS*) (*12 p.*) *Autor: Oleg Košik.*
Paneme tähele, et $1\,\mathrm{l/m^2}$=$1\,\mathrm{mm}$ ehk otsitav torustiku äravool on arvuliselt võrdne äraveetavate sademete hulgaga millimeetrites.

a) Olgu $h_6 = 22\,\mathrm{mm}$ sademete koguhulk 6 minuti järel ning $h_9 = 28\,\mathrm{mm}$ omakorda 9 minuti järel, H mitu millimeetrit sademeid suudab endas mahutada kraav (kui äravoolu ei oleks) ning u töökorras torustiku sademete äravoolu kiirus millimeetrites minutis.

Saame võrrandid

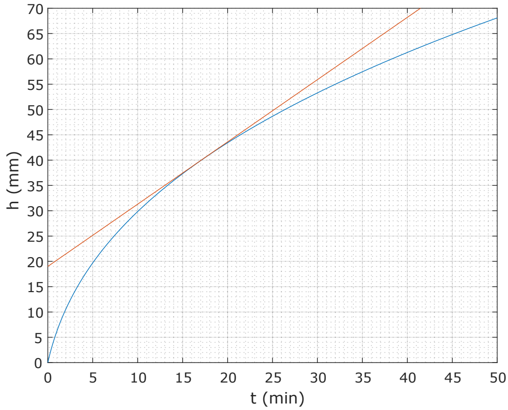
$$h_6 = H + 0.5u \cdot 6\,\mathrm{min}$$

ja

$$h_9 = H + u \cdot 9\,\mathrm{min}$$

Sellest võrrandisüsteemist leiame $u = 1\,\mathrm{mm/min}$ ja $H = 19\,\mathrm{mm}$. Niisiis on töökorras torustiku äravoolu võime $1\,\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{m^2}}$ minutis.

b) Olgu otsitud äravoolu kiirus u_x. Siis sirge $h(t) = H + u_x t$ näitab, kui palju suudab kanalisatsioonisüsteem akumuleerida vett maksimaalselt igal ajahetkel (H on kraavi panus ja $u_x t$ sadeveetorustiku panus). Selleks, et uputus ei tekiks, peab sademete koguhulga graafik jääma alati sellest sirgest allapoole. Kiirus u_x on minimaalne siis, kui see sirge on graafiku puutuja. Tõmbame niisiis graafikult puutuja, mis läbib punkti $(0{,}H)$. Selle puutuja tõus on otsitav kiirus u_x. Mõõtmised annavad meile $u_x = 1{,}23\,\mathrm{mm/min} = 1{,}23\,\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{m^2}}$ minutis.



E1.(*NÕGUSLÄÄTS*)(*12 p.*) *Autor: Erkki Tempel.*
Asetame läätse millimeeterpaberile.
Fookuskauguse mõõtmiseks suuname läätse optilise peateljega paralleelse kiire läätseni ning joonistame millimeeterpaberile murdunud kiire. Kui me suuname läätsele mitu optilise peateljega paralleelset kiirt, siis murdunud kiirte pikendused (joonistame need millimeeterpaberile) kohtuvad fookuses F. Mõõdame millimeeterpaberi abil fookuse F kauguse läätse keskpunktist, mis ongi nõgusläätse fookuskaugus f_l.

Kumerusraadiuse leidmiseks talitame samamoodi, kuid märgime millimeeterpaberile läätselt (mis toimub kui nõguspeegel) peegeldunud kiired. Nõguspeegli korral peegli optilise peateljega paralleelsed kiired koonduvad fookuses F. Teades nõguspeegli fookuse F asukohta, saame mõõta fookuskauguse f_p. Teades, et kumerusraadius $R = 2f_p$, saame arvutada kumerusraadiuse R.

E2.(*KEHA TIHEDUS*)(*12 p.*) *Autor: Erkki Tempel.*
Tiheduse saame leida valemiga $\rho = \frac{m}{V}$, kus m on keha mass ning V keha ruumala.

Mõõdame kaaluga tundmatu keha massi m.

Seejärel mõõdame kaaluga vee ja topsi kogumassi M. Kinnitame tundmatu keha niidi külge ning riputame keha vette hõljuma (keha ripub niidi küljes ning anuma põhja ei puuduta). Mõõdame nüüd näiva vee (veetase topsis tõusis) ja topsi kogumassi M'.

Kui keha on vette rippuma pandud, siis mõjub kaalule jõud $F' = Mg + \rho_v V g$, kus V on keha ruumala, seega $M' = M + \rho_v V$.

Avaldame viimasest seosest keha ruumala

$$V = \frac{M' - M}{\rho_v}$$

Teades nüüd keha massi m ja ruumala V, saame leida keha tiheduse

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m\rho_v}{M' - M}$$