

Keskkooli ülesannete lahendused

1. Kui valgus langeb vertikaalsihi suhtes nurga α all, siis murdunud valguse levimismurk β on antud murdumiseadusega $\sin\beta = \sin\alpha/n$, kus n on murdumisnäitaja. Olgu tiigi sügavus h ; põhjani jõudmiseks kuluv aeg on $hn/c\cos\beta = 2h\sin\alpha/c\sin 2\beta$, sest valguse levimise kiirus on c/n . Niisiis levib kiiremini see kiir, mille jaoks $\sin 2\beta$ on suurem. Nurk β on kahanev funktsioon n -ist; siinus on kasvav funktsioon kuni 90° -ni. Seega on kuni $\beta = 45^\circ$ -ni nobedam väiksema n -iga punane valgus, suuremate nurkade puhul on aga olukord vastupidine. Nurk saab olla suurem küll kui 45° , sest täieliku sisepeegeldumise nurk $\beta_{\max} = \arcsin(1/n) \approx 48,8^\circ$.

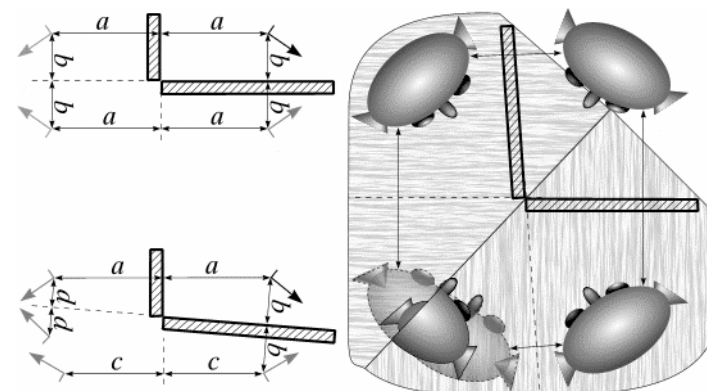
2. Olgu kaalu õlgade pikkused l_1 ja l_2 ning vihtide massid kummalgi kaalumisel vastavalt m_1 ja m_2 ; uuritava keha mass m on otsitav. Esimese kaalumise kohta võime kirjutada $m \cdot l_1 = m_1 \cdot l_2$ ja teise kaalumise kohta $m_2 \cdot l_1 = m \cdot l_2$. Jagades esimese võrduse teisega, saame $m = \sqrt{m_1 m_2}$.

3. **a)** Energia jäävuse seaduse saab kirja panna kujul $mv^2/2 = kq^2/l$, kus l tähistab minimaalset laengute vahelist kaugust. Siit saame avaldada $l = 2kq^2/mv^2$. **b)** Nüüd ei ole laengud lähimas asendis enam paigal, vaid liiguvad võrdsete kiirustega. Impulsi jäävuse tõttu on see pool esialgselt. Seega $mv^2/2 = kq^2/l + mv^2/4$ ning järelikult $l = 4kq^2/mv^2$.

4. Eeldame, et soojusenergia, mille radiaator ajaühikus annab õhule, on võrdeline radiaatori ja õhu temperatuuride vahega: $P_1 = A(t_r - t_s)$, kus A on konstant. Analoogiliselt, soojusenergia, mis hajub toast õue, $P_2 = B(t_s - t_v)$, kus t_v on välistemperatuur. Tasakaalu korral $P_1 = P_2$. Asendades siia võrrandisse konkreetsed väärtused $t_v = t_1$, $t_r = t_2$ ja $t_s = t_3$ saame avaldada suhte $k = A/B = (t_3 - t_1) / (t_2 - t_3) \approx 0,538$. **a)** Samast võrrandist kujul $k(t_r - t_s) = t_s - t_v$ saame avaldada radiaatori temperatuuri: $t_r = [(1 + k)t_s - t_v]/k = (1,538 \cdot 18 + 20) / 0,538 \approx 89$ ($^\circ\text{C}$). **b)** 3) Vee temperatuur radiaatoris on piiratud vee keemistemperatuuriga, seega $t_v = 100^\circ\text{C}$. Avaldame samast võrrandist $t_v = t_s - k(t_r - t_s) = 18 - 0,538 \cdot (100 - 18) = -26$ ($^\circ\text{C}$).

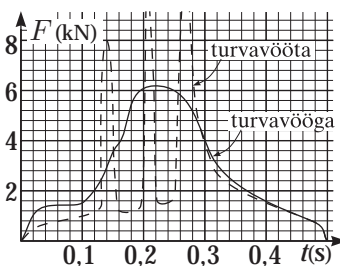
5. Õhu kokku surumisel kehtib peale ette antud seaduse $pV^\gamma = \text{Const}$ veel $pV/T = \text{Const}$. Kombineerides neid kahte leiame $p^{\gamma-1}/T^\gamma = \text{Const}$ ning järelikult $T \propto p^{1-1/\gamma} = p^{2/7}$. Siinjuures sümbol \propto tähistab võrdelisust. Seega on ventiili läbiva õhu temperatuur $T_1 = T_0[(p_1 + p_0)/p_0]^{2/7}$, sest tema rõhk on sama, mis õhul kummi sisemuses ning võrdne välisrõhu ja manomeetri näidu summaga. Asendades arvulised väärtused leiame, et $T_1 = 401\text{K} = 128^\circ\text{C}$.

6. Õhu kokku surumisel kehtib peale ette antud seaduse $pV^\gamma = \text{Const}$ veel $pV/T = \text{Const}$. Kombineerides neid kahte leiame $p^{\gamma-1}/T^\gamma = \text{Const}$ ning järelikult $T \propto p^{1-1/\gamma} = p^{2/7}$. Siinjuures sümbol \propto tähistab võrdelisust. Seega on ventiili läbiva õhu temperatuur $T_1 = T_0[(p_1 + p_0)/p_0]^{2/7}$, sest tema rõhk on sama, mis õhul kummi sisemuses ning võrdne välisrõhu ja manomeetri näidu summaga. Asendades arvulised väärtused leiame, et $T_1 = 401\text{K} = 128^\circ\text{C}$. **a)** Lahendus on toodud vasakpoolsel üllemisel joonisel. Tege- mist on vertikaalsest ja horisontaalsest peeglist tekkinud kujutistega ning kujutise-kujutisega. Vertikaalsest peeglist tekkinud kujutise peegeldus horisontaalsest peeglist langeb täpselt ühte horisontaalsest peeglist tekkinud kujutise peegeldusega vertikaalsest peeglist; kujutisi on kokku kolm. **b)** Ühekordse peegeldumise tulemusel tek-

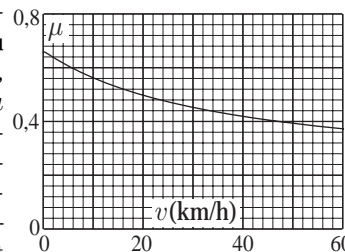


kinud kujutistel on tõesti vasak ja parem pool vahetatud, seda on näha ka noolekeste näite varal. Kujutise-kujutise puhul on peegeldumine ja poolte vahetumine toimunud kaks korda ning seega on vasak ja parem pool jälle õiges kohas. **c)** Kui peeglid ei ole enam täisnurga all (alumine joonis), siis kujutise-kujutised enam kokku ei lange ning kujutiste koguarv on neli. Peegli lõplike mõõtmete tõttu ei ole kujutised mitte igast punktist vaadatuna terves ulatuses nähtavad. Oletagem, et parempoolsel joonisel kujutatud mehike vaatab vasaku silmaga. Vertikaalselt on viirutatud see piirkond, kus on nähtavad need kujutised, mille tekkimisel toimub viimane silma poolne peegeldus horisontaalses peeglis; horisontaalselt on viirutatud sama piirkond vertikaalse peegli jaoks. Kujutiste mittenähtavad osad on joonisel poolläbipaistvad. Seega paistab, nagu läheks nagu kitsa- maks, keskelt oleks justkui siil välja lõigatud.

7. **a)** Graafiku alune pindala S on autole üle antud jõuimpulss, mis peab olema võrdne auto impulsi muuduga, $S = mv$. Olgu vertikaaltele väiksema jaotuse väärtus $1x$. Mõõdame ära graafiku aluse pindala — selgub, et $S = 5x \cdot s$. Võrrandist $mv = 2 \cdot 10^4 \text{kg} \cdot \text{m/s} = 5x \cdot s$ leiame, et $x = 4 \cdot 10^3 \text{N}$ ja seega vertikaaltele suurem jaotus on $2 \cdot 10^4 \text{N}$. **b)** Turvavööga kinnitatud reisija kiirendus on enam-vähem sama, mis autolgi, $a_a(t) = a_r(t)$; indeks a tähistab autot ja r — reisijat. Seega $F_r(t) = a_r(t)m_r = F_a(t)m_r/m_a$ ja järelikult reisijale mõjuv jõud kordab sama kõverat, mis autole tervikunagi mõjuv jõud, vt. joonis. Turvavööta reisija põrkab aeg-ajalt vastu takistusi — rooli, klaasi jms. ning neil hetkil on ta kiirendus suur; sel ajal kui miski ta liikumist ei takista, on ta kiirendus jälle üsna väike. Graafiku alune pindala on sama, mis vööga reisijalgi.



8. **a)** Nagu ülalmainitud, seadusest ja graafilult selgub, võib ABS-pidurite korral lugeda autole mõjuva hõõrdejõu konstantseks, $F_h = mg\mu_{\max}$, kus $\mu_{\max} = 0,68$. Seega kiirendus $a = g\mu_{\max}$ ja piduritee $s = v_0^2/2g\mu_{\max} = 16,7^2/2 \cdot 9,8 \cdot 0,68 = 21$ (m). **b)** Joonisel toodud graafiku maksimum nihkub auto kiiruse vähenedes kogu aeg vasakule ning selleks ajaks, kui auto peatub, on ta jõudnud $u = 0$ juurde välja. Seega μ - v teljestikus graafikul vasakpoolne tõusev osa puudub, kõver algab maksimumi juurest ning kordab ligikaudselt alge graafiku langevat osa. Pilti saab täpsustada, kui panna tähele, et väiksematel kiirustel on μ - u teljestikus langev osa nihutatud vasakule, võrdeliselt v muuduga. Seega saame otsitava kõvera kätte nii, et "venitame" 60-km-sele kiirusele vastava kõvera langeva osa horisontaalsiis välja nii, et ta algaks 0 juurest ja lõpeks 60 km/h juures. **c)** Graafiku tõusev osa on tingitud sellest, et rehvi pind deformeerub ja kuigi kontaktpinnal libisemist ei toimu, on ühe ratta pöörde jooksul läbitud vahemaa l suurem ratta ümbermõõdust p . Vastavalt välja pakutud mudelile on nende pikkuste suhteline erinevus $(l - p)/p$ võrdne rehvi pealispinna suhtelise deformatsiooniga ε . Maksimaalne on see deformatsioon siis, kui libisemiskiirus u on maksimaalne, kuid füüsilist libisemist kontaktpinnal veel ei toimu, s.o. graafiku maksimumi juures. Kui rattaste nurkkiirus on ω , siis $\omega l = v$ ja $\omega(l - p) = u$; seega $\varepsilon = (l - p)/p = u/v$. Maksimumi juures $u_m = 8$ km/h ning $\varepsilon_m = 8/60 = 0,13$.

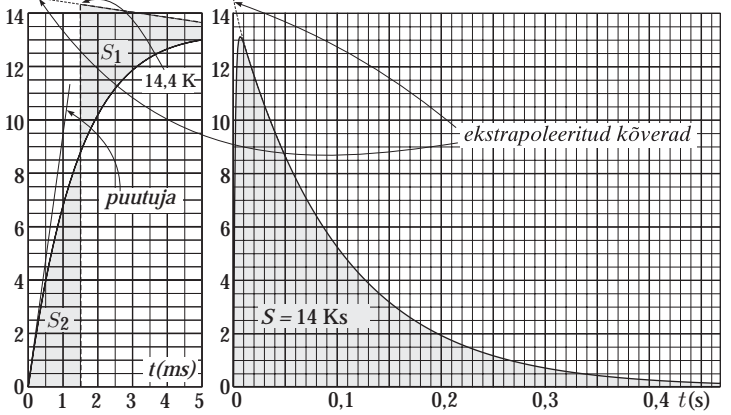
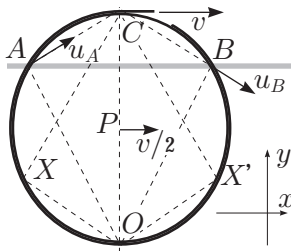


9. **a)** Leiame silindri hetkelise pöörlemiskeskme O . Paneme tähele, et kui me teame keha kahe punkti kiirusvektori suunda, siis on pöörlemiskese leitav neile vektoritele tõmmatud ristsirgete lõikumispunktina, sest vektor, mis on tõmmatud pöörlemiskesksest mingi keha punktini ja selle punkti kiirusvektor on alati risti. Kui me võtame kasutusele koordinaadistikku, kus x -telg on paralleelne kareda ribaga ja y -telg on sellega risti, siis hõõrdejõudude summa projektsi-

oon y -teljele peab olema null, sest niidi poolt mõjuv jõud on y -teljele risti. Hõõrdejõud mõjub kehale ainult kahes punktis (punktides A ja B), kusjuures nende jõudude moodulid on võrdsed. Seega peavad nende sihid moodustama x -teljega ühesugused nurgad. Et igas punktis kehale mõjuv hõõrdejõud on paralleelne selle punkti kiirusega aluse suhtes, siis peavad punktide A ja B kiirusvektorid olema samuti x -telje sihi suhtes ühesuguse nurga all. Järelikult on kolmnurk AOB võrdkülgne ning punkti O x -koordinaat peab olema sama, mis niidi ja silindri puutepunktil C . Edasi paneme tähele, et hõõrdejõudude moment punkti C suhtes peab olema null, sest niidi poolt mõjuva jõu õlg on selle punkti suhtes null. Kui $\angle OBC \neq 90^\circ$, siis mõlemad jõud keeravad ühes suunas ja ainus võimalus jõumomentide tasakaalu tingimuse rahuldamiseks ongi, et $\angle OBC = 90^\circ$. See tähendab, et lõik OC peab olema kolmnurkale OBC ehitatud ümberringjoone diameetriks, ehk teisisõnu, punkt O on silindri kontuuri ja punktist C tõmmatud vertikaali lõikepunkt. Niisiis on silindri kese P pöörlemiskeskmele kaks korda lähemal, kui punkt C , mille kiirus on v . Järelikult on silindri keskme kiirus $v/2$. See kiirus on paralleelne niidiga, sest punktid O , C ja P levavad ühel sirgel. **b)** Paneme tähele, et pöörlemiskeskme asukoht ei sõltunud parameetrist a . See annab lootust, et tema asukoht jääb samaks ka siis, kui terve pind on kare. Tõepoolest, oletame, et pöörlemiskeskme asukoht jääb muutmataks. Jagame silindri ja aluse kontaktpinna mõtteliseks hästi väikesteks tükkideks. Vaatleme suvalist tükikest punktis X . Et $\angle OXC = 90^\circ$, siis punkti X kiirusvektori siht läbib punkti C ja seega on talle mõjuva jõumomendi õlg punkti C suhtes null. Loomulikult on siis null ka kõikide jõumomentide summa. Vaatleme edasi tingimust, et hõõrdejõudude projektsioonid x -teljele peavad andma summas nulli. On lihtne näha, et punktis X ja sirge OC suhtes sümmeetriliselt paigutatud punktis X' mõjuvate jõudude x -telje suunalised komponendid taandavad üksteise. Niisiis on meie poolt tehtud oletus selle kohta, et punkt O on endiselt pöörlemiskeskmele tõepoolest kooskõlas kõigi tasakaalu tingimustega ning võime väita, et silinder liigub endiselt kiirusega $v/2$. Absoluutsest rangusest punkti b) lahenduse juures jääb puudu see, et me ei tõesta lahenduse ühesust, sest põhimõtteliselt võiks ju olla mõeldav, et tasakaalu tingimused on rahuldatud mitme erineva pöörlemiskeskme jaoks. Näiteks kui igasugune hõõre puuduks täielikult, siis sõltuks silindri liikumine sellest, millise algse nurkkiiruse talle anda. Antud juhul on lahendus tegelikult siiski ühene.

10. a) Voolutugevus on maksimaalne vahetult peale ahela sulgemist, siis, kui kondensaator pole veel tühjenema jõudnud hakata: $I_{\max} = U/R$. **b)** Kogu kondensaatori energia eraldub soojusena traadil ning tingimuse $t_1 \ll t_2$ tõttu toimub see nii kiiresti, et soojusvahetust ümbritseva keskkonnaga faktiliselt ei jõua toimuda. Edasi hakkab traadi temperatuur soojusvahetuse tõttu langema. Niisiis kehtib traadi temperatuuri maksimumi jaoks seos $CU^2/2 = C_s \Delta T_{\max}$. Graafikult leiame, et $\Delta T_{\max} = 13,2$ K, seega $C_s = CU^2/2\Delta T_{\max} = 0,00218$ J/K. Tegelikult jõuab mingil määral siiski toimida ka soojusvahetus ümbritseva keskkonnaga, mis viib osa kondensaatori esialgsest energiast minema; seega on täpne vastus veidi väiksem, kui $0,00218$ J/K. **c)** Lühikese aja jooksul peale ahela sulgemist võib lugeda, et kondensaatori pinge pole veel oluliselt jõudnud muutuda. Sel ajal on traadi temperatuuri sõltuvus ajast lineaarne, sest traadil eralduv võimsus U^2/R on konstantne ning kogu võimsus läheb traadi temperatuuri tõstmiseks: $\Delta T = U^2 t / RC_s$. Vasakpoolsest graafikult leiame null-punktist tõmmatud puutuja tõusu: $U^2 / RC_s = 9,5 \text{ K} / 1 \text{ ms} = 9500 \text{ K/s}$. Seega $R = 24^2 / (0,00218 \cdot 9500) \Omega = 27,8 \Omega$. **d)** Soojusvahetuse kiirus ümbritseva keskkonnaga on harilikult võrdeline temperatuuride vahega: $P_{sv} = \alpha \Delta T$ — seda eeldusel, et soojuskiirgus on tühine; toa temperatuuri lähedastel temperatuuridel see eeldus kehtib. Kogu kiiratud soojus $CU^2/2$ on võimsuse integraal aja järgi, s.o. $P_{sv} - t$ -graafiku alune pindala. Tänu valemile $P_{sv} = \alpha \Delta T$ on see avaldatav $\Delta T - t$ -graafiku aluse pindala $S_{\Delta T-t}$ kaudu: $CU^2/2 = \alpha S_{\Delta T-t}$. Seega $\alpha = CU^2/2S_{\Delta T-t}$. Parempool-

selt graafikult leiame, et $S_{\Delta T-t} = 1,4 \text{ K}\cdot\text{s}$. Kui traadil eraldub konstantne võimsus U_1^2/R , siis soojusliku tasakaalu puhul peab keskkonnale ära antav võimsus olema sama suur: $\alpha \Delta T_1 = U_1^2/R$. Seega $\Delta T_1 = U_1^2/R\alpha = 2S_{\Delta T-t}U_1^2/U^2RC = 2 \cdot 1,4 / 16 \cdot 27,8 \cdot 0,0001 \text{ K} = 63 \text{ K}$. **e)** Punktis b) me ei arvestanud, et osa



soojust oli läinud kaduma soojusvahetuse teel. Nüüd me oskaksime selle parandi välja arvutada, sest me teame, milline on soojusvahetuse kiirus. Teine osa veast tuli sellest, et temperatuuri maksimumi hetkeks oli kondensaatorile jäänud veel väike laeng ja sellega koos veidi energiat. Üks moodus täpse vastuse leidmiseks on selline, et me selgitame välja, milline oleks traadi temperatuuri graafik siis, kui traadi takistus oleks kaduvväike, kuid kõik muud omadused oleksid samad, mis ennegi. Sellisel juhul $t_1 = 0$ ning graafiku maksimum anaks meile punkti b) valemil rakendades täiesti täpse vastuse. Otsitava graafiku leidmiseks paneme tähele, et tema langeva osa kuju on täpselt sama, mis ette antud graafikulgi, sest see osa sõltub ainult soojusmahtuvusest ja soojusvahetuse kiirusest. Samuti on kahel graafikul üks ja sama pindala, sest see sõltub kogu energiast $CU^2/2$. Erinevus on graafiku tõusvas osas: ette antud graafikul on see sujuv, otsitaval aga hüppab hetkeliselt maksimumini (ning hakkab siis langema). Seega on vaja ekstrapoleerida antud graafiku langevat osa vasakule, kuni sellise punktini, kus kahe graafiku alused pindalad on võrdsed, v.t. joonis. Nagu näha, on uue graafiku maksimum $14,4 \text{ K}$; punkti b) valemi põhjal $C_s = 0,00200 \text{ J/K}$. Kui kasutada punktides c) ja d) soojusmahtuvuse täpsustatud väärtust, siis saame $R = 30,3 \Omega$ ja $\Delta T_1 = 58 \text{ K}$.

E11. Teooria. Katse kirjeldus - mida ja kuidas mõõdab. Oluline on mitme perioodi mõõtmine ja pika niidi kasutamine, et saada suuremat täpsust (2p). Katse. Tulemuste esitamine tabelina (1p), õige tulemus, st pendli pikkuse kasvades periood suureneb (1p), graafiku telgede õige valik koos ühikutega (2p). T ja l vahelise seose leidmise idee - graafiku lineariseerimine (1p). Õigesti teisendatud graafik (1p). Õige seose leidmine teisendatud graafikult, mitte valemi teadmise abil (1p). **Järeldus.** Katse tulemuse kokkuvõtte, hinnang täpsusele või meetodile jne (1p).

E12. Teooria. Vedeliku tiheduse määramiseks kasutame areomeetrit, mille valmistame pulgakestest ja plastiliinist. Kui üleslükkejõud on areomeetri kaaluga võrdne, siis areomeeter heljub vedelikus nii, et ta ei ulatu üle veepinna. Kui teise vedeliku tihedus on suurem, siis ulatub areomeetri ots vedelikust välja. Põhjus on selles, et ka nüüd on tarvis kompenseerida pulga kaal. Kuid kui tihedus on suurem, siis sellevõrra väiksem ruumala vedelikku tuleb välja tõrjuda ($F_u = (Vg)$). Kui tihedus on väiksem, siis areomeeter upub. Areomeetri idee peale tulek (2p). Selle tööprintsipi seletamine nii suurema kui väiksema tihedusega vedeliku korral (2p). Valemi kasutamine põhjendamisel (1p). **Katse.** Eristatavate katsetulemuste saamine (1p). Katsetulemuste registreerimine (klaasi number, kas ujub heljub või upub) (1p). Kolm ainet õiges järjekorras (2p), kaks ainet õiges järjekorras (1p). **Järeldus.** Katse tulemuse kokkuvõtte, hinnang täpsusele või meetodile jne (1p).