

Eesti koolinoorte 55. füüsikaolümpiaad

Lõppvoor. 8. märts 2008. a.

Gümnaasiumi ülesannete lahendused

1. (KERAD)

Kehale antakse energia $E_k = \frac{mv^2}{2}$. Massikese saab impulsi $p_c = mv$ ning hakkab vertikaalsuunas liikuma kiirusega

$$v_c = \frac{p_c}{m + m} = \frac{v}{2}$$

ning süsteemi kulgliikumise energia on seega

$$E_v = \frac{v_c^2(m + m)}{2} = \frac{mv^2}{4}.$$

Kui keha saavutab maksimaalse kõrguse, on tema kulgliikumise energia täielikult muutunud potentsiaalseks energiaks ning süsteemi kineetiline energia on nüüd

$$E = E_k - E_v = \frac{mv^2}{4}.$$

Vastus: $\frac{mv^2}{4}$

2. (PING-PONG)

Kui pall tõuseb kahe järjestikuse põrke vahel (pärast i -ndat põrget) kõrgusele h_i , saame nende põrgete vahelise ajavahemiku t_i :

$$h_i = \frac{g \left(\frac{t_i}{2}\right)^2}{2} \implies t_i = 2\sqrt{\frac{2h_i}{g}}.$$

Igas lennu haripunktis on palli kiirus ja ka kineetiline energia null ning koguenergia E_i potentsiaalne. Kui palli mass on m , siis $E_i = mgh_i$ ja on võrdeline haripunkti kõrgusega h_i . Seega ka haripunkti kõrgus kahaneb pärast iga põrget k korda: $h_{i+1} = \frac{h_i}{k}$. Ilmselt selles seoses $h_0 = h$.

Kukkumisaeg enne esimest põrget:

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Nii saamegi koguaja:

$$\begin{aligned}
 t &= t_0 + t_1 + t_2 + \dots = \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h}{gk}} + 2\sqrt{\frac{2h}{gk^2}} + 2\sqrt{\frac{2h}{gk^3}} + \dots = \\
 &= \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h}{gk}} \left[1 + \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^1 + \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^3 + \dots \right] = \\
 &= \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h}{gk}} \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{k}}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{1}{\sqrt{k} - 1} = \\
 &= \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{k} - 1} \right) = \frac{\sqrt{k} + 1}{\sqrt{k} - 1} \sqrt{\frac{2h}{g}}.
 \end{aligned}$$

(Kasutasime geomeetrilise jada summa valemit.)

Vastus:

$$t = \frac{\sqrt{k} + 1}{\sqrt{k} - 1} \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

3. (TOAÕHK)

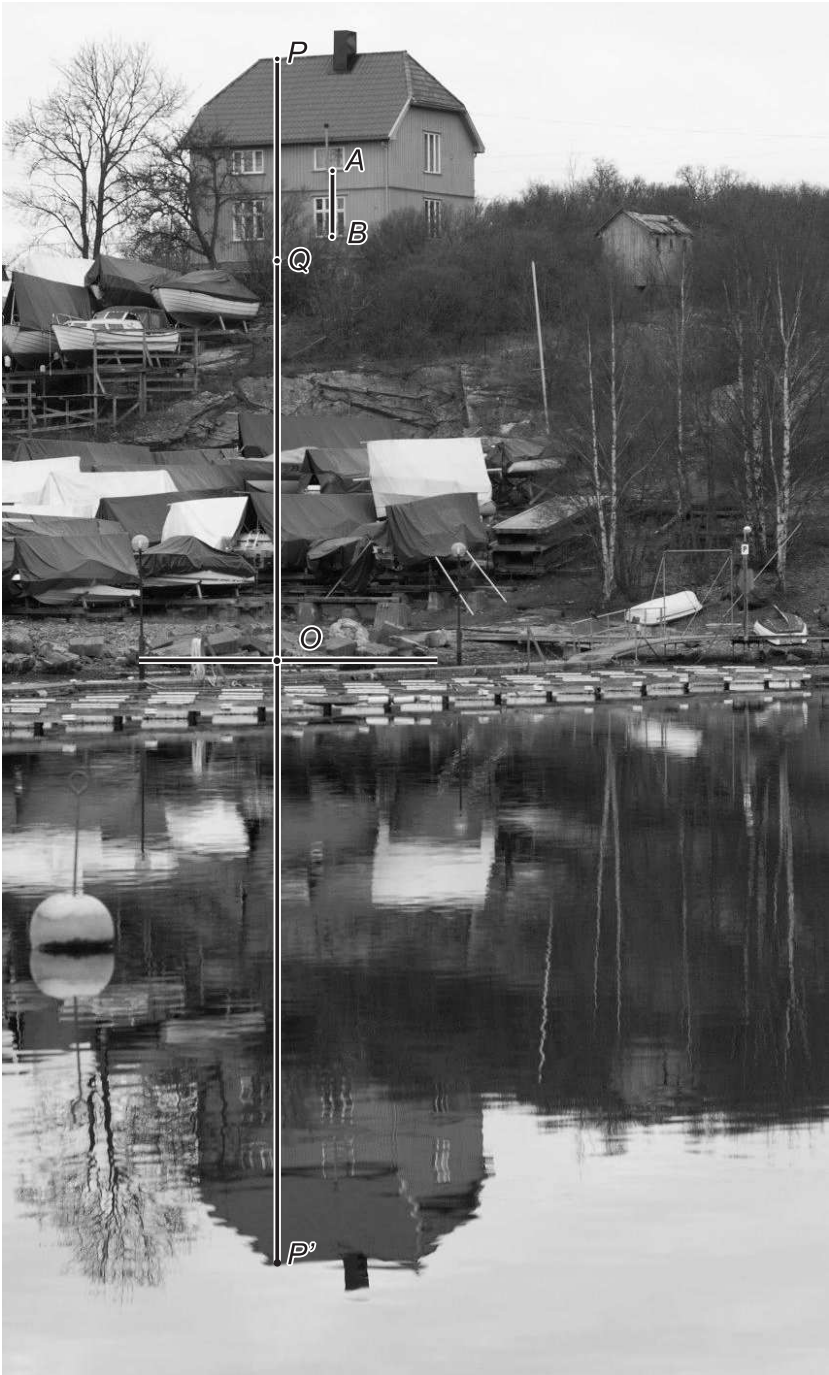
Summaarne kineetiline energia avaldub $E = N \cdot \langle E_m \rangle$, kus N on toas oleva gaasi molekulide arv ja $\langle E_m \rangle$ ühe molekuli gaasi keskmine kineetiline energia.

$$\langle E_m \rangle = \frac{3}{2} kT$$

Ideaalse gaasi võrrandist saab avaldada toas olevate molekulide arvu $N = pV/(kT)$ Pannes need kokku, $E = \frac{3}{2} pV$. Toas on õhurõhk võrdne välisrõhuga. Toas olevate õhumolekulide summaarne kineetiline energia ei sõltu temperatuurist.

4. (MAJA) Maja teatud punkt P ja tema peegelkujutis mere pinnalt P' paiknevad sümmeetriliselt mere tasandiga. Vaatleme mõttelist sirget PP' . Tema lõikepunkt merega O paikneb mõlemast otsast võrsel kaugusel ning tänu sellele saame me jooniselt punkti O kergelt määrata kui löigu PP' keskpunkti. Maja kõrgus merepinnalt vastab vundamenti kaugusele punktist O , vt joonis. Mõõtes jooniselt akende vahekauguse $AB = 9,5$ mm ja $OQ = 58,5$ mm saame

$$H = 3 \text{ m} \cdot \frac{OQ}{AB} = 18,5 \text{ m}.$$



5. (VEEALUNE VALGUS)

Helduste suhte annab (veepinnalt peegeldumist mitte arvestades) silmaava nurkläbimõõtude ruutude suhe (= vastavate ruuminurkade suhe) allika asukohast vaadatuna.

Jooniselt

$$2L \tan(\alpha'/2) = L \tan(\alpha/2) + L \tan(\beta/2),$$

kus langemis- ja murdumisnurkade $\alpha/2$ ja $\beta/2$ vahel kehtib seos

$$\frac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\beta/2)} = n.$$

Arvestade nurkade väiksust, saame nendest seostest $(\frac{\alpha}{\alpha'})^2 = \frac{4n^2}{(n+1)^2}$. Arvestades ka peegeldumist veepinnalt, saame heledustesuhteks

$$\frac{I}{I_0} = \frac{4(1-r)n^2}{(n+1)^2} = 1,28.$$

Vastus: veest vaadates 28% heledam.

6. (VEE KEEMINE)

Leiame pindpinevuse tõttu mullis tekkiva lisarõhu. See võrdub teatavasti $P = \frac{2\sigma}{r}$.

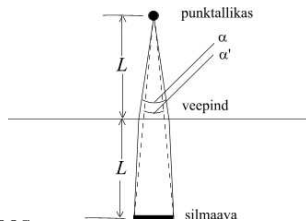
Seda saab mitmel moel tõestada. Selleks vaatleme mulli keskpunkti läbivat tasandit, mis jaotab kera kaheks poolkeraks, mida tõmbab kokku pindpinevusjõud $F = 2\pi r\sigma$, see oleks identne lisarõhu poolt tekitatava jõuga $F = \pi r^2 \cdot P$. Seega tekitab pindpinevus mullis lisarõhu $P = \frac{2\sigma}{r}$.

Samale tulemusele võiksime jõuda ka järgnevalt. Pindpinevuse pinnaenergia avaldub teatavasti $E = \sigma 4\pi r^2$. Suurendades raadiust väikese Δr võrra, muutub energia $\Delta E = 4\pi\sigma((r+\Delta r)^2 - r^2) \approx 4\pi\sigma 2r\Delta r$. Arvestades aga, et ühikulise mulli pindala kohta mõjub vastujõud p , tuleb mulli suurendamisel raadiuse Δr võrra teha tööd $A = pS\Delta r = p4\pi r^2\Delta r$. Tingimusest $A = \Delta E$ saamegi $p = \frac{2\sigma}{r}$.

Kuni 105 kraadini ei toimunud keemist, seega pidid mullid olema nii väikesed, et pindpinevuse poolt tekitatud lisarõhu ja õhurõhu summa jäi suuremaks kui küllastunud veeauru rõhk: $p_0 + \frac{2\sigma}{r} > p_{aur} = p_0 + 5 \cdot 3.5 \text{ kPa}$, siit $r = \frac{2\sigma}{5 \cdot 3.5 \text{ kPa}} = 6.6 \mu\text{m}$.

7. (TRAAT)

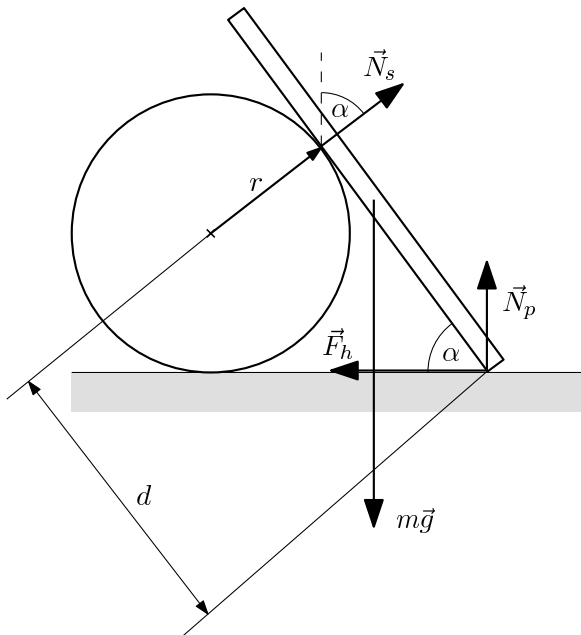
Traadijupp pikkusega δ omab ristlõikepindala $s = S \cdot 1 \text{ mm}/\Delta$ ning takistust $r = \rho\delta/s = \rho\delta\Delta \cdot 1 \text{ mm}^{-3}$. Liites kokku kõikide väikeste juppide takistused näeme, et kogutakistus $R = \rho A \cdot 1 \text{ mm}^{-3}$, kus A on graafiku alune pindala (liita tuleb ka joonest $\Delta = 1 \text{ mm}$ allapoole jääv osa). Joonise abil leiame $A \approx 14 \text{ mm} \cdot \text{m}$ ning seega $R \approx 14 \Omega$.



8. (V-TORU)

Oletame, et vesi on tasakaalust hälbinud nii, et veekiht, mille kõrguse projektsioon toru sihis on δx , on kandunud nurga α all olevast toru pooldest teise. Veetaseme kõrguste erinevus toru kahe poole vahel on $\delta h = \delta x (\cos(\alpha) + \cos(\beta))$, mis tekitab lisarõhu $\delta P = \rho \delta h g$. Lisarõhk mõjub vedelikule jõuga, mille toru-sihiline komponent on $F = \delta P S = \rho \delta x (\cos(\alpha) + \cos(\beta)) g S$. See valem on sarnane vedrupendli valemiga $F = k \delta x$, kus $k = \rho (\cos(\alpha) + \cos(\beta)) g S$. Sellise pendli omavõnkesagedus avaldub $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho (\cos(\alpha) + \cos(\beta)) g S}{m}}$. Seega võime öelda, et toru pooli painutades muutub vedeliku võnkumise sagedus $\sqrt{\cos \alpha + \cos \beta}$ korda (sagedus väheneb).

9. (VARRAS)



Joonis 1: lahenduse juurde

Vardale mõjuvad põranda ja silindri toereaktsioonid (vastavalt \vec{N}_p ja \vec{N}_s), hõõrdejõud \vec{F}_h ja raskusjõud $m\vec{g}$. (Vt. joonist 1.) Asend on stabiilne, kui jõudude ja jõumomentide tasakaalu tingimustest avaldatav hõõrdejõud ei ületa maksimaalset seisuhõõrdejõudu:

$$F_h \leq \mu N_p \quad (1)$$

ja varda alaots ei tõuse õhku:

$$N_p \geq 0. \quad (2)$$

(Siin ja edaspidi võiksime sama hästi rangeid võrratusi kasutada, täpne libisemise piir on reaalselt saavutamatu.)

Jõudude tasakaal horisontaalsihis:

$$F_h = N_s \sin \alpha \quad (3)$$

ja varda sihis (võinuksime soovi korral valida ka muu sihi):

$$N_p \sin \alpha + F_h \cos \alpha = mg \sin \alpha. \quad (4)$$

Olgu d kaugus varda alaotsast toetuspunktini. Jõumomentide tasakaal varda alumise otsa suhtes (jällegi oleksid muud punktid võrdväärselt kasutatavad):

$$mg \frac{\ell}{2} \cos \alpha = N_s d. \quad (5)$$

Avaldame jõud ja asendame võrratustesse:

$$(5), (3) \implies F_h = \frac{mg\ell}{2d} \sin \alpha \cos \alpha \quad (6)$$

$$(6) \rightarrow (4) \implies N_p = mg \left(1 - \frac{\ell}{2d} \cos^2 \alpha \right) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (6), (7) \rightarrow (1) \implies \frac{\ell}{2\mu d} \sin \alpha \cos \alpha &\leq 1 - \frac{\ell}{2d} \cos^2 \alpha \implies \\ \implies \ell &\leq \frac{2\mu d}{\cos \alpha (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} \end{aligned} \quad (8)$$

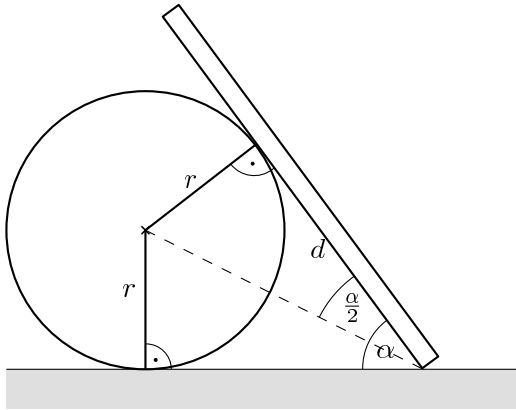
$$\begin{aligned} (7) \rightarrow (2) \implies 1 - \frac{\ell}{2d} \cos^2 \alpha &\geq 0 \implies \\ \implies \ell &\leq \frac{2d}{\cos^2 \alpha} = \frac{2\mu d}{\mu \cos^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (9)$$

(9) on leebem võrratus kui (8), mis on niisiis ℓ ülempiiriks (paremal nimetajas on sel üks positiivne liige, $\sin \alpha$, juures). Kuna rangemat alampiiri ei ole, jääb selleks d .

d leidmiseks ühendame varda alaotsa silindri teljega (joonis 2). Tekib kaks võrdset kolmnurka, millest:

$$d = \frac{r}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{r \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (10) \rightarrow (8) \implies \ell &\leq \frac{2\mu r}{(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \cos \alpha \tan \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{2\mu r}{(1 + \mu \cot \alpha)(1 - \cos \alpha) \cos \alpha}. \end{aligned} \quad (11)$$



Joonis 2: d leidmine

Vastus:

$$\frac{r \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \leq \ell \leq \frac{2\mu r}{(1 + \mu \cot \alpha)(1 - \cos \alpha) \cos \alpha}.$$

10. (POOL)

Venitame pooli väikese $\Delta \ell$ võrra pikemaks ja avaldame tehtud töö (A) kahel eri viisil. Ühelt poolt $A = F_1 \Delta \ell$. Samas salvestub osa kulutatud energiat (ΔE_m) magnetväljas ja ülejäänud (ΔE_v) kas eraldub vooluallika sisetakistusel (see peab nt. lühise korral jääva voolu hoidmiseks alati olemas olema) või, kui $A < \Delta E_m$, täiendatakse vooluallika tööga. Igal juhul:

$$A = \Delta E_m + \Delta E_v.$$

ℓ suurenedes B väheneb, mistõttu ilmselt $\Delta E_m < 0$ ja vooluallika sisetakistusel eraldub energiat:

$$A > 0 \implies \Delta E_v > 0.$$

Vajalikud energiamuudused võime leida mitmel eri viisil.

Esimene lahendus. Olgu kogu magnetvälja energia E_m . Selle energia ruumtihedus:

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0} \implies E_m = w \ell S = \frac{\ell S B^2}{2\mu_0} \implies \Delta E_m = \frac{S \Delta(\ell B^2)}{2\mu_0} = \frac{INS \cdot \Delta B}{2}.$$

Toimigu pooli pikenedamine ajaga Δt ja indutseerigu magnetvoo muutus poolil elektromotoorjõu absoluutväärtusega \mathcal{E} . Faraday induktsiooniseadusest:

$$\mathcal{E} = N \frac{|\Delta B| \cdot S}{\Delta t}.$$

Siit saamegi ΔE_v :

$$\Delta E_v = I\mathcal{E}\Delta t = INS|\Delta B|.$$

Teine lahendus. Leiame tiheda pooli induktiivsuse L :

$$NBS = LI \implies L = \frac{NBS}{I}.$$

Magnetvälja energia:

$$E_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{NBSI}{2} \implies \Delta E_m = \frac{INS \cdot \Delta B}{2}.$$

Toimugu pooli pikenemine ajaga Δt ja indutseerigu magnetvoo muutus poolil elektromotoorjõu absoluutväärtusega \mathcal{E} . Eneseinduktsioonielektromotoorjõud tuleneb Faraday induktsiooniseadusest:

$$\mathcal{E} = \frac{|\Delta(NBS)|}{\Delta t} = \frac{|\Delta(LI)|}{\Delta t} = \frac{NS|\Delta B|}{\Delta t},$$

kust saame:

$$\Delta E_v = I\mathcal{E}\Delta t = INS|\Delta B|.$$

Ühine osa mõlemale lahendusele. Leiame ΔB , eeldades, et $\Delta \ell$ on väike:

$$\Delta B = \mu_0 IN \Delta \left(\frac{1}{\ell}\right) = \mu_0 IN \left(\frac{1}{\ell + \Delta \ell} - \frac{1}{\ell}\right) = -\mu_0 IN \frac{\Delta \ell}{(\ell + \Delta \ell)\ell} \approx -\mu_0 IN \frac{\Delta \ell}{\ell^2};$$

Lõpuks:

$$F = \frac{A}{\Delta \ell} = \left(-\frac{INS}{2} + INS\right) \frac{|\Delta B|}{\Delta \ell} = \frac{INS|\Delta B|}{2\Delta \ell} = \frac{\mu_0 I^2 N^2 S}{2\ell^2}.$$

Vastus:

$$F = \frac{\mu_0 I^2 N^2 S}{2\ell^2}.$$

Märkus. Paar sõna ülesande tekstis tehtud eelduse kohta, et kõik keerud hakkavad otstest tõmbamisel eemalduma võrdse vahemaa võrra. Tegelikult see ei kehti, otstest tõmbamisel hakkaksid kõigepealt lahti hargnema otsmised keerud (ja märksa väiksema jõu juures). Ilmselt oleks võimalik keerdude ühtlane eemaldumine spetsiaalse mehhanilise konstruktsiooni abil, kui keerud poleks mitte klaaspulgal, vaid vastava raamistiku peal. Aga selgub, et antud ülesande vastus realiseerub lihtsamal olukorras ka. Kui võtta kinni poolist kahest lähestiku asuvas kohas keskpäiga läheduses, siis allpoolleitatav jõud

on ühtlasi selline jõud, millega tõmbamisel saab natuke eemaldada pika pooli keskkohast vasakule- ja paremale poole jäävaid keerde (seda väidet me siinkohas tõestama ei hakka).

EXP1 (AMPERMEETER)

Voltmeetri milliampermeetrina kasutamiseks tuleb ta lülitada paralleelselt takistiga R . Mõõdame voltmeetri sisetakistuse r (vt allpool). Et $I = U(\frac{1}{R} + \frac{1}{r})$. Kui meie tehtud ampermeetri klemmidele tuleb vool I ning voltmeetri lugem on U siis kehtib seos $I = \frac{U}{R} + \frac{U}{r}$. Seega on 1V puhul voolutugevus läbi meie ampermeetri klemmide $10^3 \cdot (\frac{1}{R} + \frac{1}{r})$ [mA/V].

Niiis peame leidma voltmeetri sisetakistuse. Selleks rakendame patarei pinge esmalt otse voltmeetrile, lugem $U_1 = \mathcal{E}$ annab patarei elektromotoorjõu; seejärel rakendame jadamisi takistiga R , lugem $U_2 = r\mathcal{E}/(r + R) = rU_1/(r + R)$. Seega $1 + R/r = U_1/U_2$, millest

$$r = R \frac{U_2}{U_1 - U_2}.$$

Asendades see tulemus eelpoolsaadud valemisse näeme, et 1V-se näidu puhul on voolutugevus

$$10^3 \cdot \frac{U_1}{U_2 R} [\text{mA/V}].$$

EXP2 (PABER)

Asetame kaks paberilehte teineteise peale, kinnitame ühe külge dünamomeetri, koormame ühenduskoha koormisega ning mõõdame lehtede vahel tekkinud hõõrdejõu. Saame tulemuseks

$$F_h = 0,2 \pm 0,1N,$$

(kus mõõteriista viga koosneb nii nullinihkest kui ka süstemaatilisest veast). Mõõtmistulemus on ilmselgelt mõõtevea piiril ja ei ole ligilähedaseltki sama suhtelise veaga läbi viidud mõõtmine kui massi mõõtmise suhteline viga. Mõõtmistäpsuse suurendamiseks on vaja suurendada hõõrdejõudu. Rõhumisjõudu suurendada pole võimalik. Küll on aga võimalik suurendada samaaegselt kokku puutuvate ühe ja sama rõhumisjõu all olevate hõõrduvate pindade arvu. Summaarne saadav hõõrdejõud oleks siis

$$F_{Sh} = F_h \cdot N,$$

kus N on samaaegsel kokku puutuvate hõõrduvate pindade arv.

Lõikame paberist ribada ja asetame neid suurema hulga vaheldumisi osaliselt teineteisega üle kattuma nii et üle ühe oleks võimalik lehti kinni hoida ja vahepealsed lehed oleksid üheagselt kinnitatud dünamomeetri külge. Asetame vaheldumisi 11 riba saades

kokkupuutuvate pindade arvuks 10 ning koormame meie koormisega ning mõõdame summaarse hõõrdejõu. Tulemus

$$F_{Sh} = 2,3 \pm 0,1\text{N}$$

on 10 korda täpsem kui esialgselt mõõdetud. Lõppavaldis on

$$\mu = \frac{F_{Sh}}{Nm, g},$$

arvuliselt $\mu = 0,35 \pm 0,02$.