Eesti koolinoorte 48. füüsikaolümpiaad

18. märts 2001. a. Lõppvoor

Keskkooli ülesannete lahendused

1. ülesanne

Mündi kiirusvektor kiiluga seotud taustsüsteemis peab olema paralleelne kaldpinnaga (vt. joon. 1). Sellest tingimusest on kerge leida kiilu kiirus $\vec{v}_k = \vec{v} - \vec{v}'$.

2. ülesanne

Liiva ja jää kogumass on leitav välja tõrjutud vee massina $m_{\text{tot}} = \rho_v S h_1 = 2\,\text{kg}$, kus ρ_v on vee tihedus. Kui liiv sadeneb põhja, siis mõjutab mannergu põhi liivateri jõuga $V_l\,(\rho_l - \rho_v)\,g$, kus V_l on liivaterade koguruumala. Kui jaotada leitud jõud üle mannergu põhja, saame sellele vastava keskmise rõhu $p_l = V_l\,(\rho_l - \rho_v)\,g/S$, mis peab olema võrdne veetaseme langusest tingitud rõhu muutusega (süsteemi “vesi+liiv” kaal ju ei muutu). Seega

$$\frac{V_l\,(\rho_l - \rho_v)\,g}{S} = \rho_v g h_2 \quad \Rightarrow \quad m_l = V_l \rho_l = \frac{\rho_l \rho_v h_2 S}{\rho_l - \rho_v} \approx 170\,\text{g}.$$

Jää mass oli niisiis $m_j = m_{\text{tot}} - m_l \approx 1830\,\text{g}$.

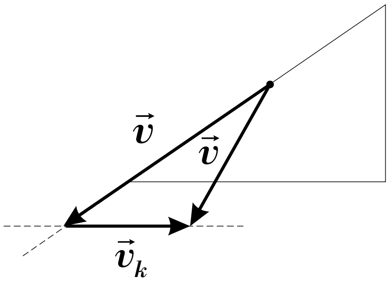
3. ülesanne

<u>Tähistused</u>: voltmeetrite V_1 ja V_2 takistused vastavalt R_1 ja R_2 ning reostaadi takistus R_0. Vooluringi võib kujutada järgmise skeemiga:

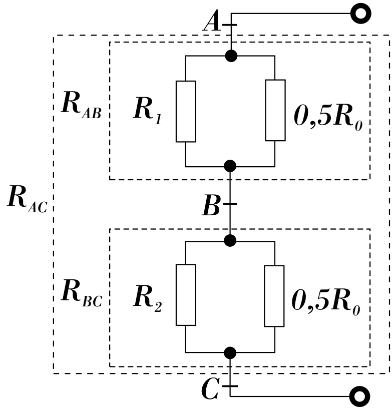
Voltmeeter V_1 näitab pinget suurusega $U_{AB} = IR_{AB}$ ja voltmeeter V_2 näitab pinget $U_{BC} = IR_{BC}$. Voolutugevuse I saab leida, kui jagada pinge reostaadi otstel (U) vooluahela kogutakistusega ($R_{AC} = R_{AB} + R_{BC}$):

$$I = \frac{U}{R_{AC}} = \frac{U}{R_{AB} + R_{BC}}\ .$$

Kuna takistid R_1, $0{,}5R_0$, R_2 ja $0{,}5R_0$ paiknevad paaridena rööpühenduses, siis saab takistite paaride kogutakistused R_{AB} ja R_{BC} arvutada



Joonis 1: vt. ül. 1



Joonis 2: vt. ül. 3

välja järgmiste valemitega:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_1} + \frac{2}{R_0}\ ,$$

$$R_{AB} = \frac{R_0 R_1}{R_0 + 2R_1} = \frac{10000 \cdot 6000}{10000 + 2 \cdot 6000} = \frac{30000}{11}\ \Omega,$$

$$\frac{1}{R_{BC}} = \frac{1}{R_2} + \frac{2}{R_0}\ ,$$

$$R_{BC} = \frac{R_0 R_2}{R_0 + 2R_2} = \frac{10000 \cdot 4000}{10000 + 2 \cdot 4000} = \frac{20000}{9}\ \Omega.$$

Seega vooluahela kogutakistus R_{AC}:

$$R_{AC} = R_{AB} + R_{BC} = \frac{30000}{11} + \frac{20000}{9} = \frac{490000}{99}\ \Omega$$

Voolutugevus I:

$$I = \frac{U}{R_{AC}} = 100 \cdot \frac{99}{490000} = \frac{99}{4900}\ \text{A}.$$

Voltmeeter V_1 näitab pinget

$$U_{AB} = IR_{AB} = \frac{99 \cdot 30000}{4900 \cdot 11} \approx 55\ \text{V}.$$

ja voltmeeter V_2 näitab pinget

$$U_{BC} = IR_{BC} = \frac{99 \cdot 20000}{4900 \cdot 9} \approx 45 \text{ V}.$$

4. ülesanne

Tähistame alg- ja lõppoleku kõrguste vahe h. Siis lõpphetkel on torude kineetiline energia mgh. See energia on kulg- ja pöördliikumise kineetiliste energiate summa. Kui kulgliikumise kiirus on v, siis massikeskme süsteemis on toru kesta ja topelttoru välimise kesta joonkiirus v; topelttoru sisemise komponendi kiirus on $v/2$. Lihttoru puhul võtab energia jäävuse seadus kuju $mgh = mv_1^2/2 + mv_1^2/2 = mv_1^2$, topelttoru puhul

$$mgh = \frac{mv_2^2}{2} + \left(\frac{\frac{m}{2} v_2^2}{2} + \frac{\frac{m}{2} \left(\frac{v_2}{2}\right)^2}{2} \right) = \frac{13}{16} mv_2^2.$$

Jagades need avaldised omavahel, saame

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{4}{\sqrt{13}}.$$

5. ülesanne

Olgu mingiks hetkeks τ tekkinud tiigile jääkiht paksusega x, milles temperatuur muutub vertikaalsihis lineaarselt: jääkihi ülemisel pinnal $t = t_2$ ja alumisel pinnal $t = t_1$. Väikese ajavahemiku $\Delta\tau$ vältel läheb läbi jääkihi õhku soojushulk $\Delta Q = k \frac{t_1 - t_2}{x} S \Delta\tau$, kus S on tiigi pindala. Selle soojushulga arvel külmub jääkihi alumise pinna lähedal ära vee kogus massiga $\Delta m = \Delta Q / \lambda$ ja jääkihi paksus suureneb

$$\Delta x = \frac{\Delta m}{\rho S} = \frac{\Delta m}{\rho \lambda} \frac{t_1 - t_2}{x} \Delta\tau$$

võrra. Nüüd tuleks minna piirile $\Delta\tau \to 0$ ja integreerida. Osutub aga, et õige tulemuse saame ka, kui hindame $x = h/2$, $\Delta x = h$ ja $\Delta\tau = \tau$

(otsitav ajavahemik). Seejuures me ignoreerime vee ja jää tiheduse erinevust. Siis

$$\tau = \frac{h^2 \rho \lambda}{2k\left(t_1 - t_2\right)} \approx 11 \text{ päeva.}$$

6. ülesanne

Võtame paberil vaatevälja piirile jääva punkti. Mõned sellest punktist lähtuvad valguskiired satuvad veel parajasti vaatleja silma, nagu näha jooniselt 3.

Võrdluseks võtame kiire, mis läbib luubi keskpunkti. Kuna paber on luubi fookuses, siis kõik luupi läbinud kiired on paralleelsed. Sarnaste kolmnurkade põhjal saame

$$\frac{D}{L-f} = \frac{d}{f} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{fD}{L-f} = 1 \text{ cm.}$$

7. ülesanne

Läheme autoga kaasaliikuvasse taustsüsteemi. Siin on auto tasakaalus jõudude $-m\vec{a}$, $m\vec{g}$, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ ja $\vec{F}_h$ toimel, kus $\vec{N}_1$ ja $\vec{N}_2$ on vastavalt esimestele ja tagumistele ratastele mõjuv maapinna toereaktsioon. On kaks varianti: auto järsemat pidurdamist piirab (a) libisemine; (b) oht üle esimese telje uperpalli lennata. Juhtumil (a) saame jõudude tasakaalutingimuseks horisontaalsihil

$$ma = F_h = \mu N_1.$$

Jõumomentide tasakaalutingimus tagaratta ja maapinna puutepunkti suhtes:

$$maH + mgL = N_1 2L.$$

Elimineerides N_1, saame juhtumi (a) vastuseks

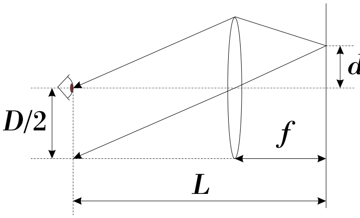
$$a = \frac{\mu g L}{2L - \mu H}\ .$$

Juhtumil (b) on toereaktsioon tagumiste rataste toetuspunktis null ning seega saame momentide tasakaalu tingimuseks esimeste rataste ja tee kokkupuutepunkti suhtes

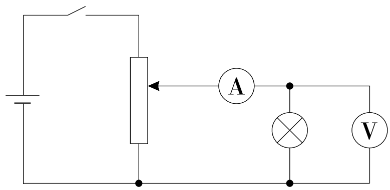
$$mah = mgL \quad \Rightarrow \quad a = g\,\frac{L}{H}.$$

Auto tegelik kiirendus ei tohi ületada kummatki eelpoolsaadud avaldist, seega on ülesande lõpvasus

$$a = g \cdot \min\left\{\frac{L}{H} \quad \frac{\mu L}{2L - \mu H}\right\}.$$



Joonis 3: vt. ül. 2



Joonis 4: vt. ül. E1

8. ülesanne

Võtame kuu pinnal, kuu ja planeedi keskpunkte ühendaval sirgel mingi ühikulise massiga keha. See keha on tasakaalus nelja jõu, kuu raskusjõu, planeedi raskusjõu, tsentrifugaaljõu ja kuu pinna toereaktsiooni toimel. Kriitiline on olukord siis, kui toereaktsioon saab nulliks ehk kui

$$\omega^2(r + R_k) = \frac{GM_k}{R_k^2} + \frac{GM_p}{(r + R_k)^2}\,,$$

kus ω on kuu tiirlemise nurkkiirus, mis on määratud seosega

$$\omega^2 r = \frac{GM_p}{r^2}.$$

r on kuu ja planeedi tsentrite vahekaugus. Eelmise avaldise viimast liiget teisendame järgmiselt:

$$\frac{1}{(r + R_k)^2} = \frac{1}{r^2\,(1 + R_k/r)^2} \approx \frac{1}{r^2\,(1 + 2R_k/r)} \approx \frac{1}{r^2}\left(1 - 2\,\frac{R_k}{r}\right).$$

Asendades ω ja koondades liikmed, saame

$$3\,\frac{M_p R_k}{r^3} = \frac{M_k}{R_k^2}.$$

Asendades siin kuu ja planeedi massid tiheduse ja ruumala kaudu ning avaldades r, saamegi nõutud tulemuse.

9. ülesanne

(a) Sisenegu mõlemasse fiibrisse samas faasis sama amplituudiga laine. Sümmeetria põhjal on väljundfiibrites ühesugused lained ning energia jäävuse põhjal peavad nende amplituudid olema sama mis sisenedes. Väljundfiibri laine moodustub fiibris püsinud laine ja teisest fiibrist tulnud laine summana. Kumbagi komponendi amplituud on $\sqrt{2}$ korda väiksem esialgsest — vastavalt energia jäävusele siis, kui laine siseneb ainult ühte fiibrisse. Niisiis kui sisenenud lainete amplituud oli A, siis väljuv resultantlaine on avaldatav kujul

$$\frac{A}{\sqrt{2}}\,[\sin\omega t + \sin(\omega t + \varphi)] = 2A\sin\omega t\cos\frac{\varphi}{2},$$

kus φ on faasinihe. Seega $\cos(\varphi/2) = 1/\sqrt{2}$ ning järelikult $\varphi = 90°$.

(b) Et kahekordsest ühest fiibrist teise üleminekust koguneb faasinihe $180°$, siis miinimumi tingimus fiibris 1 on $\Delta l = n\lambda$, kus n on täisarv. Kirjutades selle kujul $n = \Delta l/\lambda$ näeme, et

$$\Delta l/\lambda_{\min} \geq n \geq \Delta l/\lambda_{\max},$$

seega $49{,}2 \geq n \geq 45{,}4$ ning otsitavad n-i väärtused on 46, 47, 48 ja 49. Vastavad lainepikkused leiame valemist $\lambda = \Delta l/n$; nendeks on 612, 625, 638 ja 652 nm.

10. ülesanne

(a) Traadil eralduv võimsus on

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2 S}{\rho_{el} l}\ ,$$

kus S on traadi ristlõike pindala. Kui otsitav aeg on T, siis soojusbilansi paneme kirja kujul

$$\frac{U^2 ST}{\rho_{el} l} = Sl\rho c\,(t_1 - t_0),$$

millest leiame

$$T = \frac{l^2 \rho \rho_{el} c\,(t_1 - t_0)}{U^2} \approx 0{,}79 \text{ ms}.$$

(b) Avaldame temperatuuri muutumise kiiruse, s.o. tema tuletise aja järgi. Kasutame (a) osa tulemust:

$$\dot{t} = \frac{dt}{d\tau} = \frac{t_1 - t_0}{T} = \frac{U^2}{l^2 \rho \rho_{el} c}.$$

Vaatleme aega funktsioonina temperatuurist: $\tau = \tau(t)$. Selle funktsiooni tuletis on

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{l^2 \rho c}{U^2}\,\rho_{el}.$$

Niisiis, funktsiooni $\tau = \tau(t)$ tuletist me teame — see erineb graafikul toodud funktsioonist üksnes konstantse kordaja $l^2 \rho c / U^2$ poolest. Otsitav ajavahemik $\Delta\tau$ on funktsiooni $d\tau/dt$ alune pindala, s.t.

$$\Delta\tau = \frac{l^2 \rho c}{U^2}\,\mathcal{S},$$

kus $\mathcal{S}$ on graafiku $\rho_{el}(t)$ alune pindala (vahemikus t_0-st kuni t_2-ni). Jooniselt leiame, et $\mathcal{S} \approx 1{,}89 \cdot 10^{-3}\,\Omega{\cdot}\text{m}{\cdot}\text{K}$. Järelikult

$$\Delta\tau \approx 1{,}89 \cdot 10^{-3} \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot 134 \cdot \frac{19300}{120^2} \approx 0{,}85 \text{ ms}.$$

(c) Tasakaalulise temperatuuri korral kiirgub soojusena samasugune võimsus, nagu saadakse elektrilise kuumutamise tulemusena, $P_s = \langle U^2 \rangle / R = U_1^2 / 2R$ (siin $\langle\rangle$ tähistab keskmistamist aja järgi). Kui eeldame, et temperatuuri kõikumised on väikesed, siis võime lugeda soojuskiirguse konstantseks. Poole perioodi jooksul on elektriline võimsus null ning sel ajal temperatuur kahaneb lineaarselt; poolperioodi jooksul kaotatud soojushulk $\Delta Q = P_s T/2$. Teise poolperioodi jooksul on elektriline võimsus soojuskiirgusest kaks korda suurem ning kaotatud soojus tuleb tagasi. Asendades eelmisesse valemisse $P_s = U_1^2 S/2\rho_{el} l$ ning $\Delta Q = Sl\rho c\Delta t$ leiame, et $\Delta t = U_1^2 T/4\rho_{el}\rho c l^2$. Graafikult leiame, et 3200°C juures $\rho_{el} \approx 10{,}8 \cdot 10^{-7}$ Ω·m ning seega $\Delta t \approx 103$°C. Saadud tulemus on maksimum- ja miinimumtemperatuuri vahe, keskmise temperatuuri ümber toimuvate võnkumiste amplituud on pool sellest, s.o. 52°C.

1. eksperiment

Hõõglambi takistus sõltub hõõgniidi temperatuurist. Temperatuuri tõustes takistus suureneb. Hõõgniidi temperatuur sõltub voolutugevusest. Mida suurem on voolutugevus, seda suurem on temperatuur. Lambi hõõgniit on toatemperatuuril siis, kui voolutugevus lambis on 0 ehk pinge lambi hõõgniidi otstel võrdub nulliga. Mõõdame voolutugevuse lambis pinge erinevate väärtuste korral ja arvutame igal pinge väärtusele vastava takistuse väärtuse. Erilist tähelepanu tuleb pöörata mõõtmistele pinge väikestel väärtustel. Joonistame graafiku, mille ühel teljel on pinge, teisel — takistuse väärtus. Pikendades graafiku väärtuseni $U = 0$, saame hõõgniidi takistuse toatemperatuuril. Pinge muutmiseks kasutame reostaati pingejagajana. Vooluringi skeem on toodud joonisel 4.

2. eksperiment

CD-plaadi pinda võib vaadelda kui peegeldifraktsioonvõret. Suuname sellele kaugest valgusallikast (päike või laelamp) tulevad paralleelsed kiired ja jälgime difrageerunud valgust. Mõõdame ära I järku spektri laiuse CD-l (violetse ja punase serva vahekauguse) ning silma kauguse plaadist. Siis saame arvutada spektri servadele vastavate kiirte vahelise nurga α. Edasi tuletame valemi $d\,(\sin\alpha_p - \sin\alpha_v) = m\,(\lambda_p - \lambda_v)$, kus d on otsitav võre samm ja m on spektri järk (antud juhul $m = 1$). Kasutades lihtsustust $\sin x \approx x$, saame $d = m\,(\lambda_p - \lambda_v)/\alpha$. Radade vaheliseks kauguseks saame $d \approx 1 \ldots 2$ μm.