Eesti koolinoorte 28. füüsika lahtine võistlus

2. detsember 2017. a. Vanema rühma ülesannete lahendused

1. (*KIIRABIAUTO*) (*6 p.*) *Autor: Sandra Schumann.* Olgu kiirabiauto kiirus v ja auto poolt tekitatava heli sagedus f_0. Rakendame valemit kahel juhul: auto lähenemisel ja eemaldumisel.

Auto lähenemisel:

$$f_1 = \left(\frac{v_s}{v_s - v}\right) f_0.$$

Auto eemaldumisel:

$$f_2 = \left(\frac{v_s}{v_s + v}\right) f_0.$$

Kuna helisageduste erinevus kuue tooni võrra vastab kahekordsele erinevusele sagedustes, siis vastab ühetoonine erinevus $2^{\frac{1}{6}}$-kordsele erinevusele ja pooleteisetoonine erinevus $\left(2^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{4}}$-kordsele erinevusele. Seega saame:

$$2^{\frac{1}{4}} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{(\frac{v_s}{v_s-v})f_0}{(\frac{v_s}{v_s+v})f_0} = \frac{v_s + v}{v_s - v},$$

$$v_s + v = 2^{\frac{1}{4}} v_s - 2^{\frac{1}{4}} v,$$

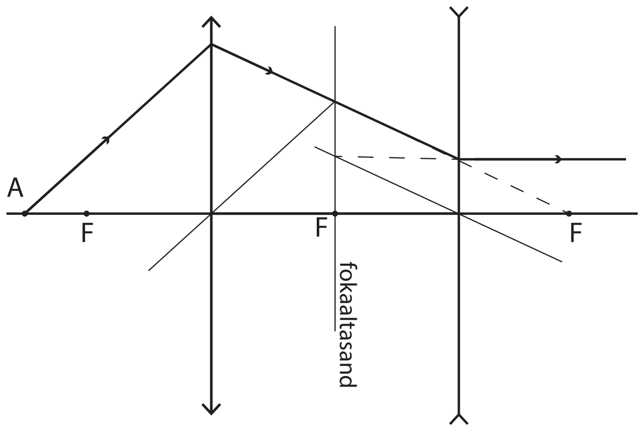
$$(2^{\frac{1}{4}} + 1)v = (2^{\frac{1}{4}} - 1)v_s,$$

$$v = \frac{2^{\frac{1}{4}} - 1}{2^{\frac{1}{4}} + 1} v_s = \frac{2^{\frac{1}{4}} - 1}{2^{\frac{1}{4}} + 1} \cdot 343\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 29{,}64\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 107\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Saame vastuseks $107\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

2. (*VALGUSALLIKA KUJUTIS*) (*6 p.*) *Autor: EFO žürii.* Valgusallika kujutist ei tekigi, või tekib lõpmatusse, kuna pärast teise läätse läbimist on valguskiired paralleelsed optilise peateljega.

Valguskiired on paralleelsed, kuna valgusallika A kujutis läbi kumerläätse tekiks nõgusläätse parempoolsesse fookusesse. Seega kumerläätse läbinud kiired koonduvad kiired langevad nõgusläätsele nii, et nad kooduksid parempoolses fookuses. Kuna nõgusläats hajutab valgust, siis on kiired pärast nõgusläätse läbimist paralleelsed. Mistõttu valgusallika kujutist ei teki, või tekib see lõpmatusse.



3. (*ELEKTRON*) (*8 p.*) *Autor: Mihkel Kree.* Elektriväljas liikuvale elektronile mõjub allapoole suunatud vertikaalne jõud qE, millele vastab elektroni kiirendus $a = qE/m$. Seega võime elektroni liikumist analüüsida analoogiliselt õhku visatud kivi liikumisega: a) elektron liigub mööda paraboolselt trajektoori; b) elektroni kiiruse horisontaalkomponent v_0 ei muutu; c) elektroni kiiruse vertikaalkomponent kasvab ajas kujul $v_y = at$; d) elektroni horisontaalne nihe kasvab ajas kujul $x = v_0 t$; e) elektroni vertikaalne nihe kasvab ajas kujul $y = at^2/2$.

Elektroni kiirus plaatide vahelisest ruumist väljumisel on minimaalne siis, kui elektroni trajektoor möödub alumise plaadi parema otsa lähedalt. Sellest väiksema kiiruse korral lendaks elektron vastu alumist plaati ning ei pääseks seetõttu plaatide vahelisest ruumist välja.

Olgu elektroni algkiirus v_0. Elektronil kulub plaatide vahelise ruumi läbimiseks aeg $t = l/v_0$, mille jooksul peab vertikaalne nihe olema võrdne plaatide vahelise kaugusega $d = at^2/2$. Siit saame avaldada elektroni plaatide vahel liikumise aja $t = \sqrt{2d/a}$, elektroni vertikaalse kiiruse plaatide vahelisest ruumist väljumisel $v_y = at = \sqrt{2ad}$ ning elektroni minimaalse vajaliku algkiiruse $v_0 = l/t = \sqrt{al^2/2d}$. Nüüd saame avaldada otsitava minimaalse lõppkiiruse mooduli:

$$v_{\min} = \sqrt{v_y^2 + v_0^2} = \sqrt{2ad + \frac{al^2}{2d}} = \sqrt{\frac{qE\,(4d^2 + l^2)}{2md}}.$$

4. (*ELEKTROONIKASKEEM*) (*10 p.*) *Autor: Sandra Schumann.* Vaatame vooluallika polaarsuse vahetamist olukorras, kus seade vahepeal välja lülitatakse.

Kondensaatoril olevaks pingeks saab pärast mõne aja möödumist 0 V. Kui seade uuesti sisse lülitada, siis läheb aega, enne kui kondensaatoril olev pinge suureneb, ja takistil R on seetõttu vähemalt hetkeliselt pinge 9 V. Selles olukorras ei tohi takistil eralduv võimsus ületada maksimaalset väärtust $P_{max} = 0{,}25\,\mathrm{W}$.

$$P_{max} > \frac{U^2}{R},$$

$$R > \frac{U^2}{P_{max}} = \frac{(9\,\mathrm{V})^2}{0{,}25\,\mathrm{W}} = 324\,\Omega.$$

Kui seadet mitte välja lülitada, jääb vooluallika eemaldamisel kondensaatorile pinge 9 V. Pärast vooluallika polaarsuse vahetamist saab takisti endale vähemalt hetkeliselt patarei ja kondensaatori liitunud pinge $9\,\mathrm{V} + 9\,\mathrm{V} = 18\,\mathrm{V}$. Selles olukorras ületab takistil eralduv võimsus väärtuse $P_{max} = 0{,}25\,\mathrm{W}$.

$$P_{max} < \frac{U_2^2}{R},$$

$$R < \frac{U_2^2}{P_{max}} = \frac{(18\,\mathrm{V})^2}{0{,}25\,\mathrm{W}} = 1296\,\Omega.$$

Märkus. Tegelikkuses ei põle reaalsed takistid kohe läbi maksimaalse võimsuse hetkelisel kergel ületamisel, seega on takisti maksimaalne võimalik väärtus märkimisväärselt väiksem ja kondensaatori mahtuvuse väärtus peab sellise olukorra tekitamise jaoks olema väga suur. Täpsed piirid aga sõltuvad konkreetsest takistist ja selle kvaliteedist.

5. (*RATTAMATK*) (*10 p.*) *Autor: Ardi Loot.* Koormatud rehvi kokkupuutepinnale maaga mõjuvad ühelt poolt rehvi sees oleva suruõhu poolt jõud $(p_0 + p)\, S$ ning teiselt poolt õhurõhu poolt tekitatud jõud $p_0 S$ ja maapinna reaktsioonijõud mg. Nende jõudude tasakaalutingimus annab meile võrrandi $(p_0 + p)\, S = p_0 S + mg$. Kasutades avaldist rehvi kokkupuutepinna suuruse $S \approx 2\pi \Delta R \sqrt{Rr}$ sõltuvusest deformatsioonist ΔR, saame leida, et rehv on deformeeritud

$$\Delta R = \frac{mg}{2\pi p \sqrt{Rr}} \approx 3{,}4\,\mathrm{mm} \tag{1}$$

võrra.

Rehvilt koormuse eemaldamise tulemusena suureneb selle ruumala $\Delta V \approx S \cdot \Delta R/2 \approx 3{,}4\,\mathrm{cm}^3$ võrra ja seetõttu väheneb suruõhu rõhk rehvis Δp võrra. Kasutades ideaalse gaasi võrrandit, saame tingimuse $(p_0 + p)\,(V - \Delta V) = (p_0 + p - \Delta p)\, V$ ja selle lahendamisel

$$\Delta p = (p_0 + p)\, \frac{\Delta V}{V} \approx 224\,\mathrm{Pa}. \tag{2}$$

On selge, et rehvi pumpamisel on rakendatav jõud võrdeline rehvis oleva rõhuga (õhurõhu suhtes) ja seega peab ta rakendama vaid

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{(p + p_0)\, m^2 g^2}{8\pi^3 p^3 \,(R - r)\, r^2 \sqrt{Rr}} \approx 0{,}15\,\%$$

võrra vähem jõudu võrreldes olukorraga, kui rehv on koormatud.

6. (*KASVUHOONEEFEKT*) (*11 p.*) *Autor: Kristian Kuppart.* Päikselt jõuab maale koguvõimsus $P_p = w_0\,(1 - \mu)\,\pi R^2$, kus R on maa raadius. Kuna atmosfäär on maalt tuleva kiirguse jaoks läbimatu, peab tasakaalu korral atmosfäär välja poole kiirgama selle sama võimsuse: $P_p = P_a$, kus P_a on atmosfääri poolt välja poole kiiratav võimsus. Maalt kiiratav võimsus avaldub kui $P_m = 4\pi R^2 \sigma T_m^4$, kus T_m on maapinna temperatuur. Tasakaalu korral on see võrdne päikeselt ja atmosfäärist tagasi kiirgunud võimsuste summaga:

$$P_m = P_p + P_a = 2P_p.$$

Maakera temperatuur avaldub kui:

$$T_m = \sqrt[4]{\frac{w_0\,(1-\mu)}{2\sigma}} = 303\,\mathrm{K}.$$

7. (*KONDENSAATOR*) (*12 p.*) *Autor: Jaan Kalda.* Vaatleme kahe dielektrikuga kondensaatorit kui kahte järjestikku ühendatud plaatkondensaatorit. Selleks asetame mõttelise metallplaadi dielektriliste kihtide eralduspinnale. Ühel kondensaatoril on seal laeng $+q$, teisel $-q$, seega vaba laeng on mõttelisel metallplaadil null (nii nagu vaja, sest tegelikult seal ju metallplaati pole). Algse dielektrikuta kondensaatori mahtuvus $C = \varepsilon_0 S/d$. Mõtteliste kondensaatorite mahtuvused on $C_1 = S\varepsilon_0\varepsilon/(d/2) = 2\varepsilon C$ ja $C_2 = S\varepsilon_0 2\varepsilon/(d/2) = 4\varepsilon C$, seega summaarse mahtuvuse pöördväärtus $C' = C_1C_2(C_1+C_2) = \frac{4}{3}\varepsilon C$ (1 p).

Dielektrikuga kondensaatori mahtuvus erineb dielektrikuta kondensaatori mahtuvusest, sest lisaks vabale laengule q metallplaadil on veel dielektriku pinnal vastasmärgiline dielektriku polarisatsioonist tingitud (dielektrikust mitte-eraldatav) laeng $-q'$. Summaarne laeng $Q = q - q'$ on selline nagu on antud pinge puhul samasugusel ilma dielektrikuta kondensaatoril. Olgu ühe mõttelise kondensaatori kogulaeng (vaba laeng + dielektriku laeng) $Q_1 = q - q_1'$ ja teisel $Q_2 = q - q_2'$, siis sellel plaadil, mis jääb dielektrikute eralduspinnale, on kondensaatori plaatide laengumärke arvestades kogulaeng $Q_1 - Q_2 = q_2' - q_1'$. Seega, dielektrikute eralduspinnal oleva kogulaengu $q_2' - q_1'$ saame leida, kui selliste dielektrikuta kondensaatorite leangute vahe, mille pinge võrdub vastavale dielektrikukihile langeva pingega.

Mõttelistel kondensaatoritel on ühesugune laeng, seose $U = q/C$ tõttu on pinge pöördvõrdeline mahtuvusega, st ühele poole (kus dielektriline läbitavus on ε) langeb pinge $2U_0/3$ ja teisele poole (kus dielektriline läbitavus on 2ε) $U_0/3$. Kui dielektriku kihti ei oleks, siis oleks kummagi mõttelise kondensaatori mahtuvus $2C$. Seega laeng mõttelistel kondensaatoritel oleks vastavalt $Q_1 = 4U_0C/3$ ja $Q_2 = 2U_0C/3$, mistõttu kogulaeng dielektrikute eralduspinnal $q' = Q_1 - Q_2 = 2CU_0/3$.

(Alternatiivne lahendus, mis kasutab Gaussi teoreemi elektrivälja jaoks ja elektrilise induktsiooni $\vec{D}$ normaalkomponendi pidevust.) Olgu kondensaatori plaadil laeng q, siis Gaussi teoreemist kondensaatori plaadi jaoks saame seose $SD = q$, millest $D = q/S$. Dielektrikute eralduspinnal on D-vektori normaalkomponent pidev, seega piirkonnas, kus dielektriline läbitavus on ε, on $E_1 = D/\varepsilon\varepsilon_0$, teises piirkonnas $E_2 = D/2\varepsilon\varepsilon_0$. Järelikult $U_0 = E_1\frac{d}{2} + E_2\frac{d}{2} = (Dd/2\varepsilon\varepsilon_0)(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}Qd/\varepsilon\varepsilon_0 S$, millest $C' \equiv Q/U_0 = \frac{4}{3}\varepsilon\varepsilon_0 S/d = \frac{4}{3}C\varepsilon$. Laengu piirpinnal q' leiame Gaussi teoreemi abil mõttelise “karbi” jaoks, mis hõlmab piirpinda: $q' = (E_1 - E_2)\varepsilon_0 S = DS/2\varepsilon = q/2\varepsilon = U_0 C'/2\varepsilon = \frac{2}{3}CU_0$.

8. (*PLOKID*) (*12 p.*) *Autor: Taavet Kalda.* Olgu ülemisele ja alumisele plokile toetuvate nööride pinged vastavalt T_1 ja T_2 ning raskuste m_1, m_2 ja M kiirendused vastavalt a_1, a_2 ja a (gravitatsiooniga samasuunalised). Kuna raskus M peab alguses paigal olema, st $a = 0$. Nööride venimatus annab kaks lisatingimust. Esiteks, ülemise nööri venimatusest peab alumise ploki kiirendus olema $-a_1$. Alumise nööri venimatusest saab järeldada, et alumine plokk liigub kiirendusega $\frac{a_2+a}{2} = \frac{a_2}{2} = -a_1$, sest m_2 ja M liiguvad keskmiselt sama palju kui alumine plokk. Kuna nöörid on kaalutud, on nende pinge igas punktis sama. Paneme alumise ploki ja iga raskuse jaoks Newtoni 2. seaduse kirja:

$$0 = 2T_2 - T_1 \qquad \text{- alumine plokk} \tag{3}$$

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1 \qquad \text{- esimene raskus} \tag{4}$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - T_2 \qquad \text{- teine raskus} \tag{5}$$

$$0 = Mg - T_2 \qquad \text{- uuritav raskus} \tag{6}$$

$$\frac{a_2}{2} = -a_1 \qquad \text{- nööride venimatus} \tag{7}$$

Tekkinud võrrandisüsteemis on 5 võrrandit ja 5 tundmatut. Seega on M üheselt määratud.

(3) ja (6) annavad $T_2 = Mg$ ja $T_1 = 2Mg$. Asendame (7) ja saadud seosed võrranditesse (4) ja (5):

$$m_1 a_1 = m_1 g - 2Mg, \tag{8}$$

$$-2m_2 a_1 = m_2 g - Mg. \tag{9}$$

Liidame (8) ja (9) kokku kaaludega $\frac{2}{m_1}$ ja $\frac{1}{m_2}$:

$$0 = 2g - 4\frac{Mg}{m_1} + g - \frac{Mg}{m_2}$$

ehk

$$M = \frac{3}{\frac{4}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{3m_1m_2}{4m_2 + m_1}.$$

9. (*MÄNGUAUTO*) (*12 p.*) *Autor: Jaan Kalda.* Vaatleme auto taustsüsteemis tasakaalutingimusi: tagumiste rataste ja maapinna suhtes välja kirjutatud jõumomentide tasakaalu tingimus: $\frac{MgL}{2} = N_eL \pm Mah$, millest $N_e = \frac{M}{2}g \pm Ma\frac{h}{L}$. Seega hõõrdejõud $F_h = (Mg - N_e)\mu = (\frac{M}{2}g \mp Ma\frac{h}{L})\mu = Ma$, kusjuures pluss ja miinus vahelduvad üle poolperioodi. Siit saame avaldada $a = \frac{\mu g}{2(1 \pm \mu h/L)}$. Seega keskmine kiirendus $\langle a \rangle = \frac{g\mu^2 h}{2L(1-\mu^2h^2/L^2)}$.

10. (*VARDAD*) (*14 p.*) *Autor: Jaan Kalda.* Vaadeldaval hetkel on kiirusvektori ja AC vahelise nurga siinus $\frac{1}{2}$, st nurk ise on 30° ja seetõttu AB on risti kiirusvektoriga. Järelikult on punkti B kiirusvektori suund sama, mis $\vec{v}$. Varda BC venimatuse tõttu peavad otspunktide kiirusvektorite projektsioonid varda sihile olema võrdsed. Et nurgad nende kiirusvektorite ja varda sihiga on võrdsed, siis peavad ka kiiruste moodulid olema võrdsed. Niisiis punkti B kiirus on $\vec{v}$. Seetõttu on punkti B kesktõmbekiirendus $v^2/2l$. Punktil B võib olla veel mingi tangentsiaalkiirendus, hetkel me teame vaid kogukiirenduse projektsiooni AB sihile. Läheme nüüd kiirusega $\vec{v}$ liikuvasse taustsüsteemi, kus punkt C on kogu aeg paigal ja punkt B on hetkeliselt paigal. Et B on hetkeliselt paigal, siis selle kesktõmbekiirendus pöörlemisel ümber C on antud hetkel null, st B kiirenduse vektor on risti BC-ga. Seega me teame kiirenduse suunda ja projektsiooni $v^2/2l$ sihile AB (mis moodustab vektori suunaga nurga 30°). Selle põhjal saame avaldada kiirenduse mooduli $a = v^2/(2l\cos 30°) = v^2/\sqrt{3}l$.