

Füüsikalised konstandid

Allpool on füüsikaliste konstantide nimekiri, mida te võite oma lahendustes kasutada lisaks ülesandes antud suurustele.

Füüsikaline konstant	Tähis	Väärtus
Valguse kiirus vaakumis	c	299 792 458 m/s
Vaakumi magnetiline läbitavus	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$; [1 N/A ² = 1 Vs/Am]
Vaakumi dielektriline läbitavus	ϵ_0	$8.854187817 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$; [1 F/m = 1 As/Vm]
Elementaarlaeng	e	$1.6021766208(98) \cdot 10^{-19} \text{ C}$; [1 C = 1 A · s]
Elektroni seisumass	m_e	$9.10938356(11) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Prootoni seisumass	m_p	$1.672621898(21) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Neutroni seisumass	m_n	$1.674927471(21) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Aatommassiühik	m_{amu}	$1.660539040(20) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Gravitatsioonikonstant	G	$6.67408(31) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
Avogadro arv	N_A	$6.022140857(74) \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Gaasikonstant	R	$8.3144598(48) \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{mol})$
Boltzmanni konstant	k_B	$1.38064852(79) \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Stefan-Boltzmanni konstant	σ	$5.670367(13) \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$
Plancki konstant	h	$6.626070040(81) \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Taandatud Plancki konstant	$\hbar = h/(2\pi)$	$1.054571800(13) \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$



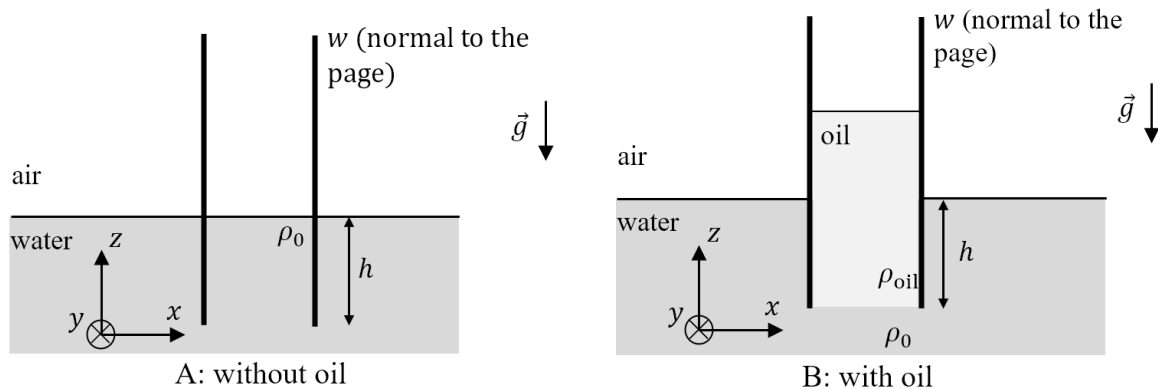
Planetaarfüüsika (10 punkti)

See ülesanne koosneb kahest iseseisvast planeetide sisemust käsitlevast osast. Planeetide pinna kumerusega kummaski osas pole vaja arvestada. Vaja võib minna valemite

$$(1+x)^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon x, \text{ juhul kui } |x| \ll 1. \quad (1)$$

Osa A. Ookeani keskahelik (5,0 punkti)

Vaadeldakse suurt veeanumat ühtlases gravitatsiooniväljas raskuskiirendusega g . Kaks üksteisega paralleelset ristkülikukujulist vertikaalset plaati paigutatakse anumasse nii, et plaatide vertikaalsed ääred on tihedalt veeanuma äärte vastas. Mõlemad plaadid on h jagu vees (joonis 1). Plaatide laius on piki y -telge w , vee tihedus on ρ_0 .



Joonis 1. Paralleelsed plaadid vees.

Õli tihedusega ρ_{oil} ($\rho_{oil} < \rho_0$) valatakse plaatide vahele kuni õli alumine kontaktpind veega jõuab plaatide alumise ääreni ning vett enam plaatide vahel ei ole. Eeldada, et plaadid ja veeanuma ääred on piisavalt kõrged selleks, et õli nendest üle ei hakka voolama. Pindpinevuse ja vedelike segunemisega ei ole vaja arvestada.

A.1 Mis on paremale plaadile mõjuva kogujõu x -komponent F_x (suurus ja suund)? 0.8pt

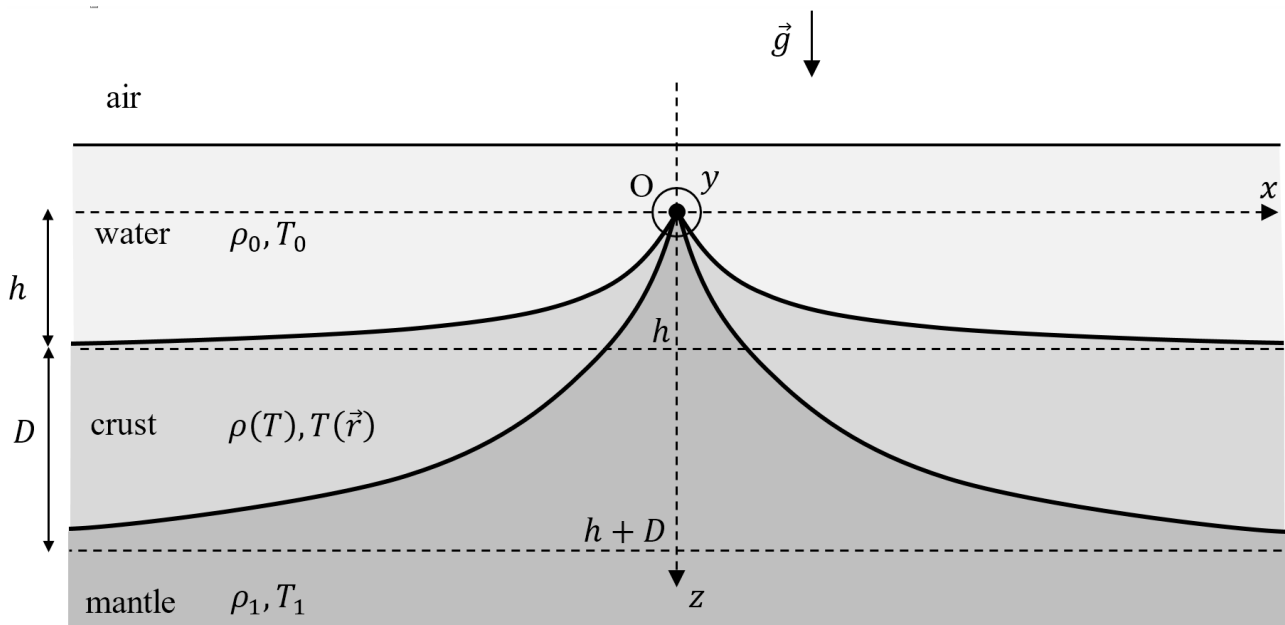
Joonisel 2 on toodud ookeani keskaheliku ristlõige. See koosneb üksteise peal olevatest vahevöö (*mantle*), maakoore (*crust*) ja ookeanivee (*ocean water*) kihtidest. Vahevöö koosneb kividest, mis saavad voolata geoloogilistel ajaskaaladel ja seega ka selles ülesandes käsitletakse vahevööd vedelikuna. Maakoore paksus on palju väiksem kui x -suunalised pikkused, seega käitub maakoore vabalt painduva plaadina. Heas lähenduses võib sellist ahelikku vaadelda kahe-dimensionaalse süsteemina, kus y -telje sihilist variatsiooni ei esine. Eeldage, et aheliku pikkus L piki y -telge on palju suurem ülejäänud ülesandes esinevatest pikkustest.

Aheliku keskel on maakoore paksus null. Keskmeest horisontaalse kauguse x suurenedes muutub maakoore paksemaks ning läheneb konstantsele paksusele D kui $x \rightarrow \infty$. Vastavalt, ookeani põhi läheneb sügavusele h võrreldes aheliku tipuga O , mis on defineeritud kui koordinaatide alguspunkt (vt joonist 2). Vee tihedus ρ_0 ja temperatuur T_0 on ajas ja ruumis konstantsed. Sama kehtib ka vahevöö tiheduse ρ_1 ja temperatuuri T_1 jaoks. Maakoore temperatuur T on samuti ajas konstantne, kuid võib sõltuda asukohast.

Heas lähenduses sõltub maakoore materjali paisumine lineaarselt temperatuurist T . Kuna vee ja vahevöö temperatuurid on konstantsed, siis on mugav kasutada muudetud soojuspaisumistegurit. Siis



$l(T) = l_1 [1 - k_l(T_1 - T) / (T_1 - T_0)]$, kus l on vaadeldava maakoore materjali väikese osa pikkus, l_1 on selle pikkus temperatuuril T_1 , ja k_l on konstantne muudetud soojuspaisumistegur.



Joonis 2. Ookeani keskahelik. z -telg on suunaga allapoole.

- A.2** Eeldusel, et maakoore on isotroopne, leidke kuidas sõltub maakoore tihedus ρ selle temperatuurist T . Eeldage, et $|k_l| \ll 1$, kirjutage oma vastus ligikaudsel kujul 0.6pt

$$\rho(T) \approx \rho_1 \left[1 + k \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right], \quad (2)$$

kus k_l^2 ja kõrgemat järku liikmetega ei arvestata. Leidke konstant k .

On teada, et $k > 0$. Võib eeldada, et maakoore soojusjuhtivustegur κ on konstantne. Sellest tulenevalt aheliku teljest väga kaugel sõltub maakoore temperatuur sügavusest lineaarselt.

- A.3** Eeldusel, et vahevöö ja vesi käituvad kui hüdrostaatilises tasakaalus olevad kokkusurumatud vedelikud, leidke väga kaugel oleva maakoore paksus D suuruste h , ρ_0 , ρ_1 , ja k kaudu. Materjali liikumisega pole vaja arvestada. 1.1pt

- A.4** Leidke parempoolsele maakoore osale mõjuv horisontaalne jõud F muutujate ρ_0 , ρ_1 , h , L , k ja g kaudu. Arendage jõud ritta k järgi ning jätke alles kõige olulisem liige. 1.6pt

Oletame, et maakoore on ülejäänud planeedist soojuslikult isoleeritud. Soojusjuhtivuse tõttu hakkavad maakoore ülemise ja alumise pinna temperatuurid ühtlustuma. Temperatuurid lähenevad teineteisele soojusliku tasakaalu saabumiseni. Võite eeldada, et maakoore erisoojus c on konstantne.

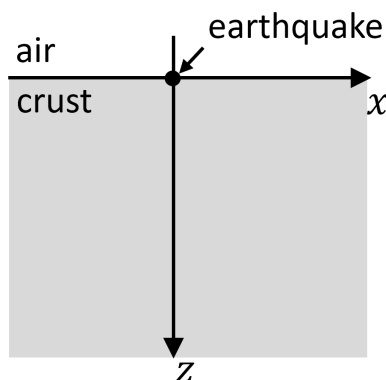


- A.5** Kasutades dimensioonide analüüsi või suurusjärkude analüüsi, hinnake karaktersest aega τ , mille jooksul ülemise ja alumise pinna temperatuuride vahe kaugel aheliku teljest läheneb nullile. Võite eeldada, et τ ei sõltu maakoore pindade algtemperatuuridest. 0.9pt

Osa B. Seismilised lained kihilises keskkonnas (5,0 punkti)

Oletame, et planeedi pinnal toimub lühike maavärin. Selle tulemusena tekivad seismilised lained, mis saavad alguse joonelt koordinaatidel $z = x = 0$, kus x on horisontaalne koordinaat ja z on sügavus pinnast allpool (Joonis 3). Seismilise laine allika pikkus on palju suurem ülejäänud ülesandes olevatest pikkustest.

Maavärina tulemusel tekib ühtlane voog nn P (primaarseid) pikilaineid kõigis x - z suundades tasandis, mille z -telje komponent on positiivne. Kuna tahkistes liikuvate lainete teooria on keeruline, siis selles ülesandes me teisi laineid ei uuri. Planeedi maakoore on kihiline nii, et P-laine kiirus v sõltub sügavusest z vastavalt valemile $v = v_0(1 + z/z_0)$, kus v_0 on kiirus maapinnal ja z_0 on teadaolev positiivne konstant.



Joonis 3. Osas B kasutatav koordinaatsüsteem.

- B.1** Vaatame üksikut maavärinast tekkinud kiirt, mis on nurga $0 < \theta_0 < \pi/2$ all z -telje suhtes ja levib x - z tasandis. Mis on horisontaalne koordinaat $x_1(\theta_0) \neq 0$, kus kiir jõuab uuesti planeedi pinnale? Kiire teekond maakoore on ringjoone kaar. Kirjutage oma vastus kujul $x_1(\theta_0) = A \cot(b\theta_0)$, kus A ja b on konstandid, mida on vaja leida. 1.5pt

Kui te ei leidnud konstante A ja b eelmises küsimuses, siis kasutage edaspidi seost $x_1(\theta_0) = A \cot(b\theta_0)$. Oletame, et koguenergia ühikpikkuse kohta, mis jõuab maakoore laineallikast P-lainetena maavärina ajal on E . Eeldage, et lained neelduvad täielikult, kui nad jõuavad planeedi pinnale altpoolt lähenedes.

- B.2** Leidke, kuidas planeedi pinnas neeldunud energiatihedus pindala kohta $\varepsilon(x)$ sõltub kaugusest mööda planeedi pinda x . Tehke $\varepsilon(x)$ graafik. 1.5pt

Nüüdsest eeldame, et lained hoopis peegelduvad täielikult, kui nad jõuavad planeedi pinnani. Kohta $z = x = 0$ on asetatud seade, mis on sama geometriaga kui eelnevalt kirjeldatud maavärina allikas. See seade suudab tekitada P-laineid vabalt valitud nurkjaotusega. Täpsemalt, signaali algne nurk vertikaaliga on vahemikus $[\theta_0 - \frac{1}{2}\delta\theta_0, \theta_0 + \frac{1}{2}\delta\theta_0]$, kus $0 < \theta_0 < \pi/2$, $\delta\theta_0 \ll 1$ ja $\delta\theta_0 \ll \theta_0$.



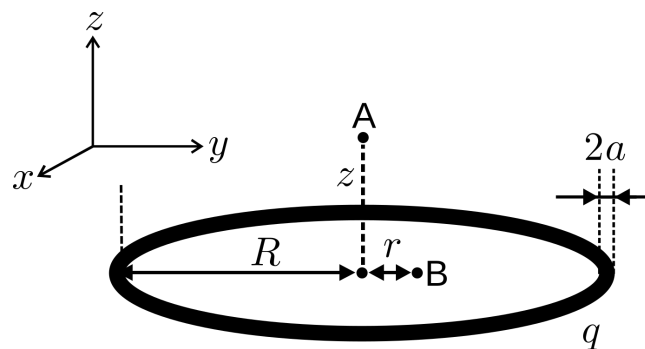
B.3 Mis kaugusel x_{\max} mööda planeedi pinda asub kõige kaugem punkt, kuhu see signaal ei jõua? Avaldage vastus θ_0 , $\delta\theta_0$ ja teiste ülval antud konstantide kaudu. 2.0pt



Elektrostaatiline lääts (10 punkti)

Vaatleme ühtlaselt laetud metallist rõngast raadiusega R ning kogulaenguga q . Rõngas on seest õõnes toroid paksusega $2a \ll R$. Osades A, B, C ja E ei ole vaja selle paksusega arvestada. xy tasand ühtib rõnga tasandiga ning z -telg on vastava tasandiga risti. Rõngas on kujutatud joonisel 1. Osades A ja B võib kasulikuks osutada valem (Taylori rittaarendus)

$$(1+x)^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon x + \frac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon-1)x^2, \text{ juhul kui } |x| \ll 1.$$



Joonis 1. Laetud rõngas raadiusega R .

Osa A. Rõnga teljel elektrostaatiline potentsiaali leidmine (1 punkt)

A.1 Arvutage pikki telge rõnga elektrostaatiline potentsiaal $\Phi(z)$ kaugusel z rõnga keskpunktist (punkt A on kujutatud joonisel 1). 0.3pt

A.2 Arendage elektrostaatiline potentsiaal $\Phi(z)$ ritta madalaima nullist erineva z astmeni, eeldusel et $z \ll R$. 0.4pt

A.3 Elektron (massiga m ja laenguga $-e$) asetatakse punkti A (joonis 1, $z \ll R$). Missugune on elektronile mõjuv jõud? Uurides jõu avaldist, leidke mis märgiga peaks q olema selleks, et laeng järgneva liikumise käigus edasi-tagasi võnkuma hakkaks. Elektroni liikumine ei mõjuta rõnga laengu jaotust. 0.2pt

A.4 Missugune on selle harmoonilise võnkumise nurksagedus ω ? 0.1pt

Osa B. Elektrostaatiline potentsiaal rõnga tasandil (1,7 punkti)

Selles osas uurite potentsiaali $\Phi(r)$ rõnga tasandil ($z = 0$) väikeste telje kauguste jaoks $r \ll R$ (punkt B joonisel 1). Arendades potentsiaali ritta kõige madalaima nullist erineva r astmeni, on elektrostaatiline potentsiaal avaldatav valemi $\Phi(r) \approx q(\alpha + \beta r^2)$ kaudu.

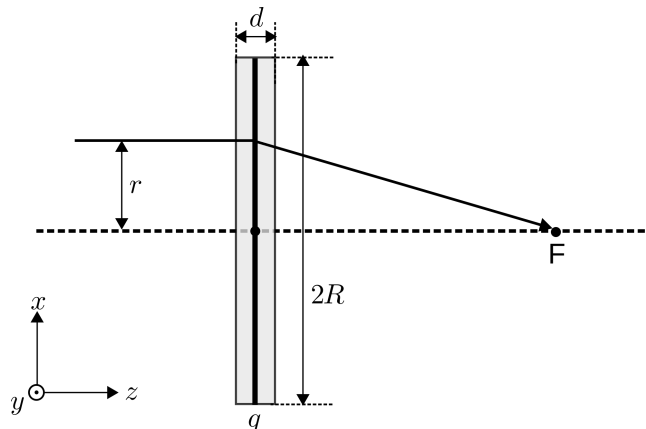
B.1 Leidke β avaldis. Te võite kasutada eelnevalt mainitud Taylori rittaarenduse valemit. 1.5pt



- B.2** Elektron asetatakse punkti B (joonis 1, $r \ll R$). Missugune on elektronile mõjuv jõud? Uurides jõu avaldist, määrake mis märgiga peaks q olema selleks, et edasine liikumine vastaks harmoonilisele võnkumisele? Elektroni liikumine ei mõjuta rõnga laengu jaotust. 0.2pt

Osa C. Idealiseeritud elektrostaatiline lätse fookuskaugus: hetkeline laadimine (2,3 punkti)

Elektronide fokuseerimise eesmärgil ehitatakse seade — elektrostaatiline lätse. Seadmehel on järgnev ülesehitus. Rõngas asub z -teljega risti olevas tasandis nagu näidatud joonisel 2. Lisaks on meil elektronide allikas mis tulistab välja mitterelativistlikke elektrone vabalt valitava kiiruse ja suunaga. Elektronide kiineetiline energia on $E = mv^2/2$ (v on kiirus) ning nende tulistamise hetk on täpselt kontrollitav. Süsteem on programmeeritud nii, et rõngas on suurema osa ajast neutraalne, aga rõnga kogulaeng muutub võrdseks q -ga siis, kui elektronid on rõnga tasandile lähemal kui $d/2$ ($d \ll R$) (sisenedes nn "aktiivsesse piirkonda", hall ala joonisel 2). Osas C eeldage, et rõnga laadimine ja tühjaks laskmine on hetkelised ning et elektrivälja "täidab ruumi" hetkeliselt. Lisaks võib ignoreerida magnetvälja mõju ning eeldada, et elektronide z -suunaline kiiruse komponent on konstantne. Elektronide liikumine ei mõjuta rõnga laengu jaotust.



Joonis 2. Elektrostaatiline lätse mudel.

- C.1** Määrake lätse fookuskaugus f eeldusel et $f \gg d$. Avaldage vastus osas B.1 defineeritud β ning teiste teadaolevate muutujate kaudu. Eeldage, et enne "aktiivsesse piirkonda" sisenemist on elektronide kimp z -teljega paralleelne ning et $r \ll R$. Laengu q märk on valitud nii, et lätse on fokuseeriv. 1.3pt

Tegelikkuses asub elektronide allikas z -teljel kaugusel $b > f$ rõnga keskpunktist. Nüüd vaadeldge elektrone, mis ei ole enam enne "aktiivsesse piirkonda" sisenemist z -teljega paralleelsed, vaid hakkavad punktallikast liikuma vabalt valitava nurga $\gamma \ll 1$ all z -telje suhtes. Elektronid fokuseeruvad kaugusele c rõnga keskpunktist asuvasse punkti.

- C.2** Leidke c avaldis. Avaldage vastus osas B.1 defineeritud β ning teiste teadaolevate muutujate kaudu. 0.8pt



C.3 Kas lätsevalem

0.2pt

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{f}$$

on elektrostaatilise lätse jaoks rahuldatud? Näidake see selgelt ära avaldades $1/b + 1/c$ väärtuse.

Osa D. Rõngas kondensaatorina (3 punkti)

Siiamaani kasutatud mudel on idealiseeritud ning eeldab, et lätts laeti hetkeliselt. Tegelikuses rõngas ei laeta hetkeliselt, sest rõngas käitub kondensaatorina, millel on lõplik mahtuvus C . Selles osas uurime selle kondensaatori omadusi. Vaja võib minna järgnevate integraale:

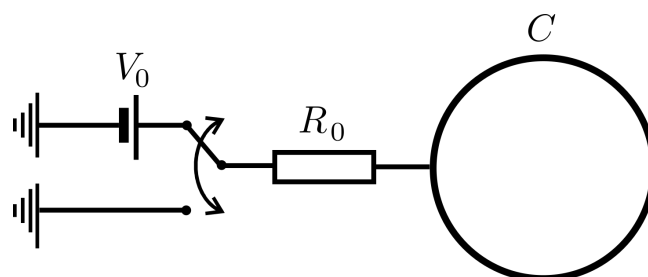
$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\ln \left| \frac{\cos x + 1}{\sin x} \right| + \text{const}$$

ja

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + \text{const.}$$

D.1 Arvutage rõnga mahtuvus C . Pidage silmas, et rõngal on lõplik paksus $2a$ ning et $a \ll R$. 2.0pt

Hetkel, mil elektronid jõuavad "aktiivsesse piirkonda" ühendatakse rõngas pingeallikaga V_0 (joonis 3). "Aktiivsest piirkonnast" väljudes rõngas maandatakse. Rõnga kontaktide takistus on R_0 ning rõnga enda takistusega ei ole vaja arvestada.



Joonis 3. Elektrostaatilise lätse laadimine.

D.2 Määrake rõnga kogulaengu $q(t)$ sõltuvus ajast, ning kandke vastav sõltuvus kvalitatiivselt graafikule. $t = 0$ vastab hetkele, mil elektronid on rõnga tasandil. Missugune on rõnga laengu q_0 väärtus siis, kui laengu $q(t)$ absoluutväärtus on maksimaalne? Rõnga mahtuvus on C (teisisõnu, te ei pea osas D.1 leitud tegelikku avaldist kasutama).
Märkus: Joonisel 3 kujutatud pingeaallika polaarsus on vaid illustratiivsetel eesmärkidel. Pingeaallika märk peaks olema valitud nii, et lätts fokuseerib.

**Osa E. Realistlikuma läätse fookuskaugus: mitte hetkeline laadimine (2 punkti)**

Selles osas peate realistlikuma läätse omadusi arvestama. Sarnaselt osadega A, B ja C, ei pea arvestama läätse paksusega $2a$ ning võite eeldada et elektronid liiguvad enne "aktiivsesse piirkonda" sisenemist paralleelset z -teljega. Samas, rõnga laadimine ei ole enam hetkeline.

E.1 Leidke läätse fookuskaugus f . Eeldage, et $f/v \gg R_0C$, aga et d/v ja R_0C on samas suurusjärgus. Avaldage vastus osas B kirjeldatud konstandi β ning teiste teadaolevate muutujate kaudu. 1.7pt

E.2 Lõpuks peaksite leidma f jaoks väga sarnase avaldise osas C leitud avaldisega võrreldes. Ainus erinevus on see, et q on asendatud efektiivse laenguga q_{eff} . Leidke q_{eff} avaldis kasutades teada olevaid suurusi. 0.3pt



Osakesed ja lained (10 punkti)

Osakese-laine duaalsusel, mille kohaselt saab iga osakest kirjeldada lainena ja ka vastupidi, on kvantmehaanikas keskne roll. Käesolevas ülesandes toetume osakese-laine duaalsusele ja veel mõnele põhieeldusele, et uurida mitmesuguseid kvantnähtusi, mis on seotud kaht erinevat tüüpi mikromaailma osakestega — fermionite ja bosonitega.

Osa A. Kvantosake kastis (1,4 punkti)

Vaatleme osakese massiga m liikumist ühe-dimensionaalses potentsiaaliaugus, mille potentsiaalne energia $V(x)$ on antud kujul

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L; \\ \infty, & x < 0 \text{ or } x > L. \end{cases} \quad (1)$$

Kuigi klassikaline osake võib sellises potentsiaaliaugus liikuda mistahes kineetilise energiaga, siis kvantosakesel saavad olla ainult teatud lubatud positiivsed diskreetsed energiatasemed. Igas sellises lubatud olekus olevat osakest saab kirjeldada de Broglie laine seisulainega, mille sõlmpunktid paiknevad potentsiaaliaugu seintel.

A.1	Määrake potentsiaaliaugus oleva kvantosakese minimaalne võimalik energia E_{\min} . Avaldage oma vastus suuruste m , L ja Plancki konstandi h kaudu.	0.4pt
------------	--	-------

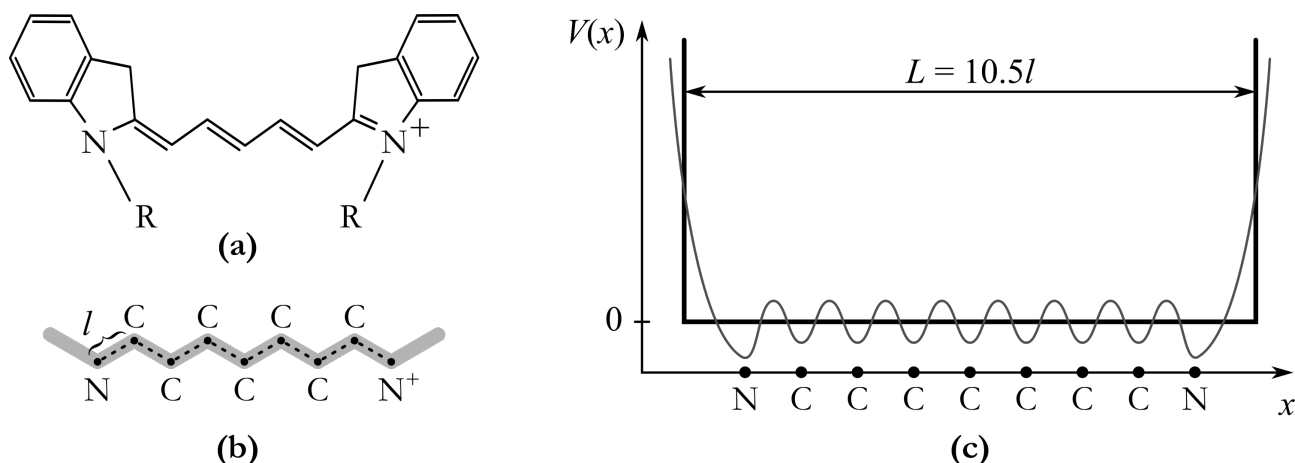
Minimaalse võimaliku energiaga osakese olekut kutsutakse põhiolekuks ja kõiki ülejäänud lubatud olekuid kutsutakse ergastatud olekuteks. Tähistame põhioleku energia E_1 ja tähistame kõigi võimalike olekute energiad E_n , sorteerituna energia väärtuse kasvavas järjekorras.

A.2	Leidke üldine avaldis energia E_n jaoks (kus $n = 1, 2, 3, \dots$).	0.6pt
------------	--	-------

A.3	Osake saab hetkeliselt üle minna ühelt olekult teisele, kiirates või neelates footoni, mille energia on võrdne osakese olekute energiatega. Leidke sellise footoni lainepikkus λ_{21} , mis kiiratakse osakese üleminekul esimeselt ergastatud olekult (E_2) põhiolekule (E_1).	0.4pt
------------	---	-------

Osa B. Molekulide optilised omadused (2,1 punkti)

Selles osas uurime tsüaniini molekuli Cy5 mitmeid optilisi omadusi. Tsüaniin on laialt kasutatav värvainemolekul, mis on skemaatiliselt esitatud Joonisel 1a. Selle optilised omadused määrab peamiselt ära selle süsinikahel, mis koosneb vaheldumisi üksik- ja kaksiksidemetega seotud süsiniku aatomitest nagu näidatud Joonisel 1b, samas kui molekuli otstel paiknevad silmused ja radikaalid R optilisi omadusi praktiliselt ei mõjuta. Süsinikahelas paikneva iga C aatomi (ja ka N aatomi) neljast valentselektronist kolm moodustavad keemilisi sidemeid, kuid ülejäänud valentselektronid on "jagatud" ja saavad liikuda piki kogu süsinikahelat. Selliste elektronide potentsiaalne energia on Joonisel 1c näidatud peenikese lainetava joonena, mille miinimumid vastavad C ja N aatomite asukohtadele.



Joonis 1. (a) Tsüaniini molekuli Cy5 keemiline struktuur (lihtsuse huvides pole vesiniku aatomeid joonisel näidatud ja R tähistab mingeid radikaale). (b) Molekuli Cy5 süsinikahel, kus keskmine aatomite vaheline kaugus on l . (c) Elektroni potentsiaalne energia piki süsinikahelat (peenike joon) ja selle lähendus kastfunktsiooniga vastavalt võrrandile (1) (paks joon).

Lihtsuse huvides lähendame potentsiaalse energia profiili lihtsa funktsiooniga, mis on antud võrrandiga (1), kus laius $L = 10.5l$ (vt paks jooni Joonisel 1c) ja $l = 140$ pm on keskmine aatomite vaheline kaugus (vt Joonis 1b). Selle tulemusena saame "elektroonse gaasi", mis koosneb 10 elektronist (7 elektroni C aatomitelt, 2 elektroni N aatomilt ja 1 elektron N^+ ioonilt), mis liiguvad ühe-dimensionaalses potentsiaaliaugus, mida vaatlesime osas A. Oma arvutustes võime jätta arvestamata nende elektronide omavahelise interaktsiooniga; kuid samas peaksime siiski silmas pidama, et elektronid on fermionid ja alluvad seetõttu Pauli keeluprintsiibile. Samuti jätame arvestamata teiste elektronide mõju ja aatomituumade liikumise.

B.1 Leidke suurim footoni lainepikkus λ , mida saab Cy5 molekul neelata, eeldades, et algselt paikneb elektronide süsteem oma madalaima energiaga olekus. Avaldage vastus, kasutades suurust l , füüsikalisi konstante ja teatud numbrilist kordajat. Arvutage välja ka vastuse numbriline väärtus. 0.8pt

B.2 Värvaine molekulil Cy3 on sarnane struktuur, kuid selle süsinikahel on 2 süsiniku aatomi võrra lühem. Kas Cy3 molekuli neeldumisspekter on nihutatud sinise või punase spektriosa poole võrreldes Cy5 molekuliga? Arvutage numbriliselt selle spektraalse nihke $\Delta\lambda$ suurus. Võite eeldada, et kahe süsiniku aatomi eemaldamine ei muuda molekuli kuju, kuid vähendab selle süsinikahela pikkust vastavalt kahe aatomi võrra. 0.4pt

Kui molekul on ergastatud olekus, võib see spontaanselt üle minna põhiolekusse, kiirates footoni. Selliste sündmuste keskmine sagedus K (see on avaldatav ergastatud olekus olevate molekulide arvu suhtelise vähenemisena dN/N ajaühikus dt , st $K = \frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$) on määratud kiiratud footoni lainepikkusega λ , ülemineku elektrilise dipoolmomendiga d (mis on suurusjärgus $d \approx el$, kus e on elementaarlaeng) ning vaakumi dielektrilise läbitavuse ε_0 ja Plancki konstandiga h .

B.3 Kasutades dimensionaalset analüüsi, leidke avaldis spontaansete kiirgamis-sündmuste keskmise sageduse K jaoks sõltuvalt suurustest ε_0 , h , λ ja d . Teie avaldise täpne numbriline tegur on $k = \frac{16}{3} \pi^3$. 0.7pt



- B.4** Cy5 molekuli korral on $d \approx 2.4 \text{ el}$. Leidke Cy5 molekuli kõige madalama ergastatud oleku keskmine fluorestsentsi eluiga τ_{Cy5} , mis on pöördvõrdeline põhiolekusse mineku kiirgamissündmuste keskmise sagedusega. 0.2pt

Osa C. Bose'i-Einsteini kondensatsioon (1,5 punkti)

See osa ei ole otseselt seotud osadega A ja B. Siin osas uurime bosonite kollektiivset käitumist. Bosonid ei allu Pauli keeluprintsiibile ja seetõttu esineb madalatel temperatuuridel või kõrgetel tihedustel huvitav nähtus, mida nimetatakse Bose'i-Einsteini kondensatsiooniks. Bose'i-Einsteini kondensatsioon on faasiüleminek iseäralikku kollektiivsesse kvantseisundisse, kus suur hulk ühesuguseid osakesi "kondenseeruvad" ühte ja samasse kvantolekusse ja hakkavad käituma ühe kvantlainena. Tavaliselt saavutatakse see faasiüleminek, kui jahutada teatud hulka osakesi alla kriitilise temperatuuri. Põhimõtteliselt saaks ka nii, kui hoida temperatuuri fikseerituna, aga suurendada osakeste tihedust üle kriitilise piiri.

Alustame sellest, et uurime temperatuuri ja tiheduse seost üleminekul. Ilmneb, et temperatuuri ja tiheduse kriitilisi väärtusi saab tuletada ühe lihtsa tähelepaneku põhjal: *Bose'i-Einsteini kondensatsioon toimub hetkel, kui de Broglie lainepikkus, mis vastab ruutkeskmise kiirusega osakesele, saab võrdseks gaasis olevate osakeste tüüpilise vahekaugusega.*

- C.1** Vaatleme gaasi, mille moodustavad soojustasakaalus olevad omavahel mitte-interakteeruvad ^{87}Rb aatomid. Kirjutage välja avaldised aatomite tüüpilise impulsi p ja tüüpilise de Broglie lainepikkuse λ_{dB} jaoks funktsioonina aatomi massist m , temperatuurist T ja füüsikalistest konstantidest. 0.4pt

- C.2** Avaldage gaasis olevate osakeste tüüpiline vahekaugus ℓ funktsioonina osakeste arvtihedusest n . Tuletage selle põhjal kriitiline temperatuur T_c funktsioonina aatomi massist, osakeste arvtihedusest ja füüsikalistest konstantidest. 0.5pt

Saavutamaks Bose'i-Einsteini kondensatsiooni laboritingimustes, peavad eksperimentaatorid gaase maha jahutama väga madalatele temperatuuridele suurusjärgus $T_c = 100 \text{ nK}$.

- C.3** Kui suur on Rb gaasi osakeste arvtihedus n_c juhul, kui üleminek toimub sellel temperatuuril? Võrdluseks, arvutage ka "tavaline" osakeste arvtihedus n_0 ideaalses gaasis standardtemperatuuril ja -rõhul, st $T_0 = 300 \text{ K}$ ja $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$. Kui mitu korda on "tavaline" gaas tihedam? Võite eeldada, et aatomite mass on 87 aatommassiühikut (m_{amu}). 0.6pt

Osa D. Kolme kiire optiline võre (5 punkti)

Esimesed Bose'i-Einsteini kondensaadid toodeti aastal 1995. Peale seda on eksperimendid selle kondensaadiga paljudes erinevates suundades edasi arenenud. Selles ülesandes osas uurite ühte kasulikku ideed asetada kondensaat ruumiliselt perioodilisse potentsiaalvälja, mille tekitavad interfereeruvad koherent- sed laserikiired. Kuna interferentsi muster on perioodiline, kutsutakse seda *optiliseks võreks*. Selles optilises võres liikuva aatomi potentsiaalne energia $V(\vec{r})$ on võrdeline valguse intensiivsusega aatomi asukohas. Oma arvutustes võite eeldada, et

$$V(\vec{r}) = -\alpha \langle |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 \rangle. \quad (2)$$

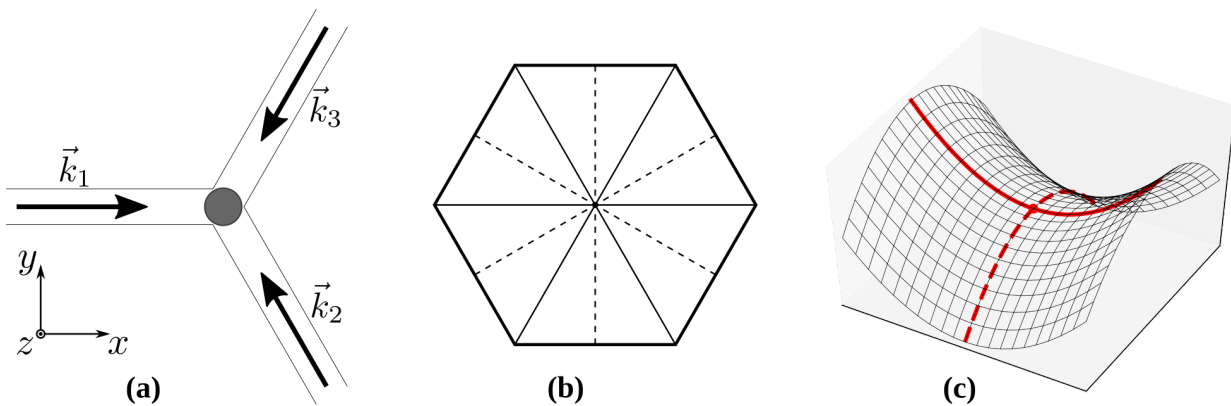
Üleval valemis α on *positiivne* konstant ja noolsulud tähistavad üle aja keskmistamist, mis eemaldab kiirelt



võnkuvad liikmed. i -nda laseri tekitatud elektrivälja on avaldatav kui

$$\vec{E}_i = E_{0,i} \vec{\varepsilon}_i \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (3)$$

kus $E_{0,i}$ on elektrivälja amplituud, \vec{k}_i on lainevektor ja $\vec{\varepsilon}_i$ on ühikpikkusega polarisatsioonivektor.



Joonis 2. (a) Kolme kiire optiline võre: kolm tasalainet lainevektoritega $\vec{k}_{1,2,3}$ kattuvad teineteisega ja interfereeruvad joonisel näidatud hallis ringis. (b) Korrapärase kuusnurga sümmeetriad: pidevad ja katkendlikud jooned näitavad kahte sümmetriatelgedede komplekti. (c) Sadulpunkt: punkt pinna peal, kus pinna puutuja tõusud kõigis ristuvates suundades on nullid, aga mis ei ole joonistatud funktsiooni ekstreemum. Liikudes joonisel mööda pidevat joont tundub funktsioonil olevat sadulpunkti miinimumpunkt, aga täiendav vaatlus ristuvast suunas (katkendlik joon) on vajalik, et eristada miinimumpunkti sadulpunktist.

Teie ülesanne on uurida *kolmnurkset optilist võre*, mille tekitab kolme võrdse intensiivsusega koherentse laserikiire interferents. Levinud katseskeem on näha Joonisel 2a. Selles katses on kõik kolm kiirt polariseeritud z suunas, kiired levivad xy tasandil ja kohtuvad teiste kiirtega võrdsete 120° nurkade all. Võtke x -telje suund paralleelseks lainevektoriga \vec{k}_1 .

D.1 Kasutades võrrandeid (2) ja (3), leidke avaldis potentsiaalse energia $V(\vec{r})$ jaoks kiirte tasandis funktsioonina raadiusvektorist $\vec{r} = (x, y)$.
Vihje: tulemuse saab väljendada mugavalt kujul konstant pluss summa kolmest koosinusfunktsioonist argumentidega $\vec{b}_i \cdot \vec{r}$. Kirjutage oma tulemus sellisel kujul ja leidke vektorid \vec{b}_i .

D.2 Leitud potentsiaalne energia on sümmeetriline kuue telje suhtes, täpsemalt öeldes on potentsiaal sümmeetriline suvalise arvu 60° pöörete suhtes ümber koordinaatide alguspunkti. Leidke lihtne argument, mis tõestaks, et see nii on.

Üleval täheldatud sümmeetria lihtsustab kahedimensionaalse potentsiaali $V(\vec{r})$ analüüsi. Nagu näidatud Joonisel 2b, on korrapärasel kuusnurgal sümmetriajooned, mis ühendavad vastasnurki omavahel (pidevad jooned) või vastaskülgede keskpunkte omavahel (katkendlikud jooned). Seega selles ülesandes ei ole vaja joonistada ja analüüsida kahedimensionaalseid potentsiaali graafikuid, vaid me saame teatud tulemusi tuletada analüüsides potentsiaali piki x ja y telgi, mis on sümmeetriatelgedeks.



- D.3** Tuletage potentsiaali $V(\vec{r})$ avaldis piki koordinaattelgi ehk leidke funktsioonid $V_X(x) \equiv V(x, 0)$ ja $V_Y(y) \equiv V(0, y)$. Leidke $V_X(x)$ ja $V_Y(y)$ kõigi ekstreemumpunktide asukohad, pidades meeles, et need on ainult ühe muutujaga funktsioonid. Need funktsioonid on perioodilised, seega palun kirjutage välja ainult üks komplekt miinimumpunkte ja maksimumpunkte ühe perioodi sees. 1.2pt

Me soovime leida niinimetatud *võresõlmi*, mis on kahedimensionaalse potentsiaali $V(\vec{r})$ miinimumide asukohad. Miinimumpunktid, mis me leidsime ühe argumendiga funktsioonidest V_X ja V_Y , võivad viidata kahedimensionaalse potentsiaali miinimumpunktile, aga me peame lisaks kontrollima, kas tegemist on sadulpunktiga. Nagu näidatud Joonisel 2c, võivad sadulpunktid ühe telje suhtes vaadates paista miinimumpunktina, kuigi tegelikult nad ei ole seda.

- D.4** Kasutades eelmise alapunkti tulemusi, leidke optilise võre tegelikud miinimumpunktid: leidke kõik koordinaatide alguspunktile kõige lähemad samaväärsed miinimumpunktid, mis ei ühti koordinaatide alguspunktiga. Mis on kahe sellise miinimumpunkti vahemaa a ehk teisti öeldes optilise võre *võrekonstant*? Avaldage tulemus kasutades laseri lainepikkust λ_{las} . 0.8pt

Ülikülmade neutraalse laenguga aatomite kohta võiks arvata, et interaktsioonid aatomite vahel on märkimisväärsed ainult siis, kui kaks aatomit on optilises võres samas miinimumpunktis. Siiski teevad eksperimentaatorid ka katseid, kus aatomite vahel on interaktsioonid üle pikkade vahemaade. Üks võimalik lähenemine põhineb *Rydbergi aatomite* tekitamisel, mis on füüsiliselt suured ja millel on lisaks teised ebataavalised omadused. Rydbergi aatomid on ergastatud aatomid, millel üks elektron on ergastatud väga kõrge peakvantarvuga n olekusse. Rydbergi aatomi suurust saab hinnata, vaadeldes elektroni kui klassikalist osakest klassikalisel orbiidil, millel on orbitaalne impulsimoment $n\hbar$, kus \hbar on taandatud Plancki konstant.

- D.5** Leidke peakvantarvu n väärtus, mille korral Rb Rydbergi aatomi raadius on võrdne laseri valguse lainepikkusega $\lambda_{\text{las}} = 380$ nm. Avaldage vastus kasutades suurust λ_{las} ja füüsikalisi konstante, ning leidke selle numbriline väärtus. 1.1pt